Corrigé. Appro 2014

1. $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$

donc $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

Il suffit de construire la courbe sur l'intervalle $[0,\pi]$

2. $x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = -2\sin t - 4\sin t\cos t = -2\sin t\,(1+2\cos t)$

$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = -4\cos^2 t + 2\cos t + 2$

$= (2\cos t + 1)(-2\cos t + 2) = +2(1-\cos t)(1+2\cos t)$

De plus : sur $[0,\pi]$, $\sin t \geqslant 0$ et $1-\cos t \geqslant 0$

tandis que $(1+2\cos t) \geqslant 0 \iff t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

t	0		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	3	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
$y'(t)$	0	$+$	0		
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

$\begin{cases} x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos\frac{4\pi}{3} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \simeq 2{,}6 \end{cases}$

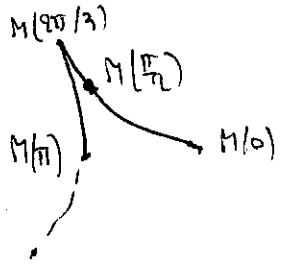
3. $x'(0) = y'(0) = 0$ et $x'(2\pi/3) = y'(2\pi/3) = 0$.

Calculons le vecteur dérivée seconde :

$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases}$ $\quad x''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

Ce vecteur est non nul, il dirige donc la tangente : $\begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

4. 

$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Lorsque $t \neq \frac{2\pi}{3}$, un vecteur tangent est $\begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$. Lorsque $t = \frac{2\pi}{3}$, le vecteur est $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, il convient également.

L'équation de la tangente est donc : $\begin{vmatrix} X - (2\cos t + \cos 2t) & -\sin t \\ Y - (2\sin t - \sin 2t) & (1-\cos t) \end{vmatrix} = 0$

$\iff X(1-\cos t) + Y\sin t - (2\cos t + \cos 2t)(1-\cos t) - \sin t\,(2\sin t - \sin 2t) = 0$

$$\Leftrightarrow X(1-\cos t) + Y\sin t - 2\cos t - \cos 2t + \underbrace{2\cos^2 t - 2\sin^2 t}_{=2\cos 2t} + \underbrace{\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t}_{=\cos t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(1-\cos t) + Y\sin t - \cos t + \cos 2t = 0}$$

6. $\mathcal{D}_t$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$, $\mathcal{D}_{t+\pi}$ a pour vecteur $\begin{pmatrix}-\sin(t+\pi)\\ 1-\cos(t+\pi)\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\sin t\\ 1+\cos t\end{pmatrix}$; Le produit scalaire de ces vecteurs est $-\sin^2 t + 1 - \cos^2 t = 0$

Ils sont orthogonaux ; $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t+\pi}$ sont orthogonales.

$\mathcal{D}_t$: $\quad x(1-\cos t) + y\sin t - \cos t + \cos 2t = 0$

$\mathcal{D}_{t+\pi}$ $\quad x(1+\cos t) + y\sin t + \cos t + \cos 2t = 0$

En additionnant $\quad 2x + 2\cos 2t = 0 \qquad x = -\cos 2t$

En combinant $\quad y\sin t\left[(1+\cos t)+(1-\cos t)\right] + (\cos 2t - \cos t)(1+\cos t) + (\cos t + \cos 2t)(1-\cos t) = 0$

$2y\sin t + \cos 2t\cos t - \cos t + \cancel{\cos 2t} - \cos t - \cancel{\cos 2t} + \cos^2 t + \cos t\cos 2t = 0$

$2y\sin t + 2\cos t(\cos 2t - 1) = 0$

$y\sin t - \cos t\, 2\sin^2 t = 0$

$y = 2\sin t\cos t = \sin 2t \qquad \begin{cases} x = \cos 2t\\ y = \sin 2t\end{cases}$

On a simplifié par $\sin t$; mais le résultat convient aussi pour $t=0$: $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_\pi$ se coupent en $(-1,0)$.

7. C'est le cercle de centre O et de rayon 1, il est entièrement parcouru, car $2t$ parcourt (et 2 fois) l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

8. Si $M(t)$ est sur le cercle : $x(t)^2 + y(t)^2 = (2\cos t + \cos 2t)^2 + (2\sin t - \sin 2t)^2$

$= 4\cos^2 t + 4\cos t\cos 2t + \cos^2 2t + 4\sin^2 t - 4\sin t\sin 2t + \sin^2 2t$

$= 5 + 4\cos 3t$

Donc $x^2(t) + y^2(t) = 1 \Leftrightarrow \cos 3t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}$

en se limitant à $[-\pi,\pi]$; on trouve donc les points $\begin{cases} M(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\\ M(\pi) = (-1,0)\\ M(-\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})\end{cases}$

Extensions de corps.

1. $a+b\sqrt{5}+ci+di\sqrt{5}=0$

$\iff a+b\sqrt{5}+i(c+d\sqrt{5})=0$

$\iff \begin{cases} a+b\sqrt{5}=0 \\ c+d\sqrt{5}=0 \end{cases}$ (un complexe est nul si et seulement si partie réelle et parties imaginaires sont nulles)

$\iff a=b=0=c=d$, car si b n'était pas nul, $\sqrt{5}=-\frac{a}{b}$ serait rationnel.

2. L est un $\mathbb{Q}$-sev de $\mathbb{C}$, donc stable pour l'addition.

De plus

$(a+b\sqrt{5}+ci+di\sqrt{5})(a'+b'\sqrt{5}+c'i+d'i\sqrt{5})$

$=aa'+5bb'-cc'-5dd'+(a'b+ab'-cd'-c'd)\sqrt{5}+(ac'+a'c+5bd'+5b'd)i$

$+(ad'+a'd+bc'+b'c)i\sqrt{5}\in L$; $1\in L$ donc L sous-anneau de $\mathbb{C}$

3. $m_\alpha : L \longrightarrow L$

a) $z \longmapsto m_\alpha(z)=\alpha z$

dans L, qui est un sous ensemble de $\mathbb{C}$, $m_\alpha(z+\lambda z')=\alpha(z+\lambda z')$

$=\alpha z+\lambda\alpha z'$

$=m_\alpha(z)+\lambda m_\alpha(z')$ $\lambda\in\mathbb{Q}$

m_α est donc $\mathbb{Q}$-linéaire.

$\operatorname{Ker} m_\alpha=\{0\}$ ~~donc m_α est~~ puisque $\alpha z=0\Rightarrow z=0$ (α non nul)

donc, endomorphisme en dim finie, m_α est bijective et donc surjective.

Il existe $z\in L$ / $\alpha z=1$

b) $\dfrac{1}{(a+c\sqrt{5})+i(b+d\sqrt{5})}=\dfrac{a+c\sqrt{5}-i(b+d\sqrt{5})}{(a+c\sqrt{5})^2+(b+d\sqrt{5})^2}=\dfrac{a+c\sqrt{5}-i(b+d\sqrt{5})}{(a^2+5c^2+b^2+5d^2)+(2ac+2bd)\sqrt{5}}$

Il ne reste plus qu'à multiplier haut et bas par l'expression conjuguée du dénom.

4. $\begin{cases} i\in L \\ \mathbb{Q}\subset L\end{cases}$ donc $\mathbb{Q}(i)\subset L$ $\begin{cases}\sqrt{5}\in L \\ \mathbb{Q}\subset L\end{cases}$ donc $\mathbb{Q}(\sqrt{5})\subset L$ $\begin{cases} i\sqrt{5}\in L \\ \mathbb{Q}\subset L\end{cases}$ donc $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})\subset L$

5. $M=\{a+bi\ /\ (a,b)\in\mathbb{Q}\}$ L'inclusion est stricte car M est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension 2

6. (a) $R\subset L$ car $i+\sqrt{5}\in L$

(b) $\gamma^2=-1+5+2i\sqrt{5}=4+2i\sqrt{5}$ donc $\underline{i\sqrt{5}\in R}$

$\gamma^3=(4+2i\sqrt{5})(i+\sqrt{5})=4i+10i+(4-2)\sqrt{5}$

$\gamma^3=14i+2\sqrt{5}$

$\gamma=i+\sqrt{5}$

donc $12i=\gamma^3-2\gamma$ et $\underline{i\in R}$. $\underline{\sqrt{5}=\gamma-i\in R}$

$R=L$

7. Non, car $\underbrace{(1+i\sqrt{5})^2}_{S^2}=-4+2i\sqrt{5}=2(1+i\sqrt{5})-6$ et $\delta^2=2S-6$, S est une extension de degré 2.