Licence S4, parcours M
12 Mai 2010
Durée 3 heures

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen d'approfondissements Mathématiques

Calculatrice, téléphone portable et document sont interdits. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut et ne sont pas rangés par difficulté croissante.

Barème définitif : 3+5+8+8

Exercice 1 : Fractions continues

Déterminer le développement en fractions continues du rationnel $\frac{3}{14}$ puis du réel $\sqrt{3}$.

Exercice 2 : Dénombrabilité

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ c'est à dire l'ensemble des réels qui sont racines d'un polynôme à coefficients rationnels. On note $\mathbb{Q}_n[X]$ l'ensemble des polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré inférieur ou égaux à n. On pourra utiliser les différents résultats de cours suivants en précisant bien quel résultat est utilisé à chaque fois.

- R_1 : La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
- R_2 : La réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble fini est dénombrable.
- R_3 : La réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable.
- R_4 : La réunion dénombrable d'ensemble dénombrables est dénombrable.
- R_5 : Le produit cartésien $(D_1 \times D_2)$ de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

1. Donner un exemple $P_1 \in \mathbb{Q}_2[X]$ dont les racines sont toutes des réels mais ne sont pas des rationnels.
2. Montrer que $\mathbb{Q}_1[X]$ est dénombrable.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. On pourra pour cela introduire une bijection simple de $\mathbb{Q}_n[X] \times \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_{n+1}[X]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
5. Soit $P \in \mathbb{Q}_n[X]$, combien P possède-t-il au plus de racines réelles ?
6. Montrer que $\mathcal{A}$ est dénombrable.
7. Question plus difficile, hors barème, à traiter en toute fin d'épreuve.
   On note maintenant $\mathcal{A}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathcal{A}$, montrer en utilisant une méthode identique à la précédente que $\mathcal{A}[X]$ est dénombrable. On admet maintenant que $\mathcal{A}[X]$ est un $\mathbb{Q}$espace vectoriel, comme $\mathcal{A}[X]$ est dénombrable, il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{A}[X]$, donc $\mathcal{A}[X] = \{Q_n \in \mathcal{A}[X], n \in \mathbb{N}\}$, construire à l'aide de cette suite une $\mathbb{Q}$-base dénombrable de $\mathcal{A}[X]$.

Exercice 3 : Théorie des corps

1. (a) Donner l'exemple d'un sous corps de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas $\sqrt{3}$. Dans la suite K représente un sous corps de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas $\sqrt{3}$. Soient $L = \mathrm{vect}_K(1, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}/a, b \in K\}$ et $K(\sqrt{3})$ le plus petit sous corps de $\mathbb{R}$ contenant K et $\sqrt{3}$.
   (b) Montrer que $(1, \sqrt{3})$ est une famille K-libre.
   (c) Montrer que $L \subset K(\sqrt{3})$.
   (d) Soit $x \in L \setminus \{0\}$, posons
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & L & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & xy \end{array}$$
      i. Montrer que $\varphi_x(L) \subset L$.
      ii. Montrer que φ_x est K-linéaire.
      iii. Montrer que φ_x est injective.
      iv. Montrer que φ_x défini un isomorphisme de L dans L.

v. Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $xy = 1$.

(e) Déduire de la question précédente que L est un sous corps de $\mathbb{R}$.

(f) Montrer que $L = K(\sqrt{3})$.

(g) En déduire $[K(\sqrt{3}) : K]$.

2. Soit $T = \{x \in \mathbb{R} / \exists P, Q \in \mathbb{Q}[X], x = \frac{P(\pi)}{Q(\pi)}\}$.
   (a) Montrer que $T \subset \mathbb{Q}(\pi)$.
   (b) Montrer que T est un sous corps de $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $T = \mathbb{Q}(\pi)$.
   (d) En utilisant le fait que π est transcendant montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\pi)$, en déduire $[\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\pi)]$.

Exercice 4 : Écriture en base 8 et ensemble de Cantor

On donne les tables de somme et de produit en base 8 :

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

1. Effectuer les calculs suivants en base 8 : $A = \overline{143}^8 \times \overline{75}^8$ et $B = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\overline{11}^8}\right)^k$.
2. Effectuer la division euclidienne de $\overline{730}^8$ par $\overline{36}^8$.
3. Déterminer le développement en base 8 du rationnel un cinquième.
4. On note $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ l'ensemble des chiffres en base 8. Soit $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 8^{-k}$, avec pour tout k, $x_k \in C$. Déterminer l'ensemble I des réels qui peuvent s'écrire ainsi, cette écriture est-elle unique ?
5. Déterminer et représenter l'ensemble J des réels qui peuvent s'écrire ainsi, avec $x_1 = 1$.
6. Déterminer et représenter l'ensemble S_1 des réels qui peuvent s'écrire ainsi, avec $x_1 \neq 1$.
7. Déterminer et représenter l'ensemble S_2 des réels qui peuvent s'écrire ainsi, avec $x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq 1$.
8. On définit ainsi l'ensemble S_n des réels qui peuvent s'écrire ainsi, avec $x_1 \neq 1, x_2 \neq 1, \ldots, x_n \neq 1$ et $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, \ldots \in C$. Cet ensemble est la réunion de segments disjoints de $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de ces segments et la longueur totale L_n de S_n ainsi que la limite L de L_n. On note S l'intersection de tous les S_n.
9. Rappeler la définition d'un ensemble parfait et montrer que S est parfait.
10. Déterminer une surjection de S dans $[0; 1]$.