S3-M
Mai 2009
Durée 3 heures

Examen d'approfondissements Mathématiques

Calculatrice et document sont interdits. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut et ne sont pas rangé par difficulté croissante. Les premières questions de chacun des exercices sont plus simples que les suivantes.

Barème indicatif (hors $\star$) : 4+5+5+5+2

Exercice 1 : Applications

Soient $f : E \to F$, et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
4. Donner un exemple avec $E = F = G = \mathbb{N}$, où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Sous groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit $G = \{p \ln 2 + q \ln(10)/p, q \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'unique couple (p, q) d'entiers tels que $2^p = 10^q$.
3. Montrer par l'absurde que $\frac{\ln 10}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$.
4. En déduire qu'il n'existe aucun $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = c\mathbb{Z}$, on pourra remarquer que $\ln 2$ et $\ln(10)$ appartiennent à G.
5. Énoncer avec rigueur un résultat sur les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ permettant de conclure que G est dense dans $\mathbb{R}$.
6. Rappeler la définition de : 'G est topologiquement dense dans $\mathbb{R}$'.
7. En utilisant la densité de G dans $\mathbb{R}$, montrer que $\{2^p 10^q/p, q \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.
8. $\star$ On admet dans cette question qu'il existe une suite d'entiers positifs, strictement croissante (p_n) et une suite d'entiers négatifs (q_n) telles que $7 < 2^{p_n} 10^{q_n} < 7 + \dfrac{1}{10^n}$. Montrer qu'il existe une infinité de puissance de 2, dont l'écriture en base 10 commence par un 7.

Exercice 3 : Écriture en base 2

1. Quels sont les réels que l'on peut écrire sous la forme $\overline{d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}^2$ avec pour tout n, $d_n \in \{0, 1\}$. (En particulier $d_0 \in \{0, 1\}$)
2. Dans la suite de l'exercice a désigne un réel dont le développement propre binaire est $a = \overline{d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}^2$ avec pour tout n, $d_n \in \{0, 1\}$. Quel est le développement de $2a$?
3. Quel est le développement de $2^n a$, pour $n \in \mathbb{N}$?
4. Quel est le développement de $a - \frac{1}{2} d_1$?
5. A quelle condition (CNS) sur d_0 et d_1 a-t-on $a < \frac{1}{2}$?
6. A quelle condition (CNS) sur les $(d_i)_{i \leq n}$ l'entier $\overline{d_0 d_1 d_2 \ldots d_n}^2$ est-il pair ?
7. Pour tout entier naturel n, montrer qu'il existe un entier naturel m, et un réel $h \in [0; \frac{1}{2}]$ tels que : $2^n a = 2m + d_n + \frac{1}{2} d_{n+1} + h$.
8. Montrer que $\cos(\pi(2m + d_n + \frac{1}{2} d_{n+1} + h))$ a le même signe que $(-1)^{d_n + d_{n+1}}$. On pourra étudier l'intervalle décrit par $d_n + \frac{1}{2} d_{n+1} + h$ lorsque h décrit $[0; \frac{1}{2}]$ pour chacun des 4 cas.

9. ★ On cherche à déterminer le développement en base 2 : $\overline{d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots}^2$ de $a = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3} \in [0, 1[$, pour cela on pose $v_0 = \cos(\frac{\pi}{2} a) = \frac{1}{3}$ et $v_{n+1} = 2v_n^2 - 1$.
   (a) Déterminer d_0.
   (b) Montrer à l'aide de formules trigonométriques que $v_{n+1} = \cos(2^n \pi a)$.
   (c) Calculer v_1, v_2, v_3, ainsi que le signe de v_4.
   (d) En déduire le début du développement en base 2 de a, on pourra déterminer d_1, d_2, d_3, d_4, d_5.

Exercice 4 : Théorie des corps

Soient $L = \text{vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} / a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ le plus petit sous corps de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt[3]{2}$.

1. Montrer que $L \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
2. Montrer que L est stable pour la multiplication ($\forall x, y \in L, xy \in L$).
3. Soit $x \in L \setminus \{0\}$, posons
$$\varphi_x : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ y & \mapsto & xy \end{array}$$
   (a) Montrer que φ_x est $\mathbb{Q}$-linéaire.
   (b) Montrer que φ_x est injective.
   (c) Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $xy = 1$.
4. Déduire de la question précédente que L est un sous corps de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
6. Montrer que $(1, \sqrt[3]{2})$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre.
7. En supposant qu'il existe des rationnels a, b vérifiant $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$, et en multipliant cette égalité par $\sqrt[3]{2}$, montrer que $L \neq \text{vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt[3]{2})$.
8. En déduire $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.

Exercice 5 : Construction à la règle et au compas

1. Montrer qu'étant donné un carré, on peut construire à la règle et au compas un carré d'aire double, et proposer une construction.
2. Montrer qu'étant donné un rectangle, on peut construire à la règle et au compas un carré de même aire.