Université de Cergy-Pontoise **2011-2012**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Examen terminal d'Algèbre bilinéaire

Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Vous pouvez admettre une question pour traiter les suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Problème

Dans tout le problème, on identifie $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs colonnes. On pourra par exemple noter pour $X \in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit Q la matrice suivante :$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On définit alors pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $< X, Y >= (x_1\ x_2\ x_3)\ {}^tQQ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ce qui peut encore s'écrire $< X, Y >= {}^t(QX)(QY)$. Préambule :

1) Vérifier que $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2) Soient $C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. On note alors P la matrice 3x3 constituée de ces trois vecteurs, $P = (C_1\ C_2\ C_3)$.
a) Vérifier que $P = Q^{-1}$.
b) En déduire que $\mathcal{B}_1 = (C_1, C_2, C_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour $< ., . >$.
c) Interpréter P comme une matrice passage.

Dans la suite, on travaille avec $\mathbb{R}^3$ muni de ce produit scalaire.

Partie I : Etude d'un endomorphisme.

On définit l'application, u, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ associe le vecteur

$$u(X) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{1}{4}x_3\right) \\ -x_2 \\ \sqrt{2}(2x_1 + x_3) \end{pmatrix}.$$

1) Ecrire A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$.
2) Vérifier que la matrice A n'est ni symétrique, ni orthogonale.

3) On note B la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$.
a) En utilisant les matrices Q et P exprimer B en fonction de A.
b) En déduire que B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.
c) Calculer ${}^tB$ et ${}^tBB$. En déduire que u est un endomorphisme orthogonal et symétrique (pour le produit scalaire $< .,. >$). Justifier sans calculs que u est une symétrie.
d) Expliquer pourquoi la matrice A n'était ni symétrique, ni orthogonale.

Partie II : Forme quadratique et réduction simultanée

On considère la forme quadratique, q, définie sur $\mathbb{R}^3$ qui à tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ associe

$$q(X) = x_2^2 - 4x_1x_3 - \frac{x_3^2}{4}.$$

1) Ecrire la matrice S_0 de q dans la base $\mathcal{B}_0$. On rappelle qu'on a alors

$$q(X) = {}^tXS_0X.$$

2) On souhaite trouver la matrice, S_1, de q dans la base $\mathcal{B}_1$.
a) pour $X \in \mathbb{R}^3$, si $X = y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3$, que représente alors $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ pour le vecteur X. En déduire que

$$X = PY,$$

où P est la matrice de passage évoquée dans le préambule.
b) Justifier que $S_1 = {}^t PS_0P$.
c) En déduire qu'il existe une constante $k > 0$ que l'on précisera telle que

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{k} & 0 & 4k-1 \end{pmatrix}$$

3) Trouver une matrice orthogonale R telle que ${}^tRS_1R = D$ soit une matrice diagonale.
4) Si on interprète R comme une matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ dans une nouvelle base $\mathcal{B}_2$, expliquer pourquoi $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour $< .,. >$.
5) Exprimer $q(X)$ ainsi que $< X, X >$ en fonction des coordonées de X dans la base $\mathcal{B}_2$.