Université de Cergy-Pontoise **Licence L2-Algèbre bilinéaire**
Examen de Mathématiques
Mme Dehy, Mr Duyckaerts, Mr Fang, Mr Hebey, Mme Varagnolo
Durée 3h00 **Mai 2009**

Les questions de cours et les exercices sont indépendants. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barême est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Questions de cours: (1) (1pt) Donner l'énoncé du théorème de la base incomplète.
(2) (1pt) Donner l'énoncé du théorème du rang.
(3) (2pts) Soient E et F deux espaces vetoriels réels de dimensions finies, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E, et $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une application linéaire de E dans F. Quelle formule relie les matrices de représentation $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}(f)$ et $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}(f)$? Vous pouvez illustrer votre réponse à l'aide d'un diagramme.

Exercice 1: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, F_1 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\tilde{\mathcal{B}}_1 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$, F_2 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\tilde{\mathcal{B}}_2 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, et F_3 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\tilde{\mathcal{B}}_3 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$. Soit aussi α un réel. On considère les applications linéaires $f_1 : E \to F_1$, $f_2 : E \to F_2$, et $f_3 : E \to F_3$ définies par

$$\begin{aligned}
f_1\left(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\right) &= \left(4x_1 + 2x_2 + 5x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(2x_1 + 4x_2 + x_3\right)\tilde{e}_2 \\
f_2\left(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\right) &= \left(x_1 + \alpha x_2 + 3x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(3x_1 + \alpha x_2 + x_3\right)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \left(\alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3\right)\tilde{e}_3 \\
f_3\left(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\right) &= \left(2x_1 + x_2 + 2x_3\right)\tilde{e}_1 + \left(3x_1 + 4x_3\right)\tilde{e}_2 \\
&\quad + \left(x_1 + 5x_2 + x_3\right)\tilde{e}_3 + \left(3x_1 + 6x_2 + 2x_3\right)\tilde{e}_4
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
(1) (1pt) Ecrire la matrice de représentation de f_1 dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_1$, et la matrice de représentation de f_3 dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_3$.
(2) (2pts) Ecrire la matrice de représentation de f_2 dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_2$. Si A est cette matrice, calculer le determinant de A. Sous quelles conditions portant sur α l'application linéaire f_2 est-elle un isomorphisme de E sur F_2 ?

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned}
&f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) \\
&= \big(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3\big)e_1 + \big(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\big)e_2 - \big(x_1 + x_2 - 3x_3\big)e_3
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
(1) (2pts) Calculer le polynôme caractéristique de f. Déterminer les valeurs propres de f.
(2) (2pts) Déterminer les sous-espaces propres de f par le calcul de bases pour ces espaces propres.

(3) (2pts) Montrer que f est diagonalisable et donner une matrice A pour laquelle la matrice $A^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)A$ est diagonale. Que vaut cette matrice diagonale ?
(4) (2pts) Calculer A^{-1} puis calculer explicitement $f^6 = f \circ \ldots \circ f$ (6 fois) en donnant la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^6) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)^6$ de f^6 dans $\mathcal{B}$.

Exercice 3: Soit E un $I\!R$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i$, de sorte que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E. Soit de plus α un réel et $f_\alpha \in End(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(x_3 - x_1\big)e_1 - \big(\alpha x_2\big)e_2 - \big(x_3 - x_1\big)e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in I\!R$.
(1) (1pt) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_\alpha)$ de f_α dans $\mathcal{B}$. En déduire (justifier l'affirmation) que f_α est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de f_α.
(2) (2pts) Déterminer les sous-espaces propres de f_α lorsque $\alpha = 1$ et trouver une base orthonormale de E qui diagonalise f_α dans ce cas.
(3) (2pts) Déterminer les sous-espaces propres de f_α lorsque $\alpha = 2$ et trouver une base orthonormale de E qui diagonalise f_α dans ce cas.

Exercice 4: Soit E un $I\!R$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit α un réel. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - \alpha^2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$.
(1) (1 pt) Sous quelle condition portant sur α la forme B est-elle un produit scalaire ?
(2) (1 pt) On suppose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Trouver une base orthonormée pour B.

Exercice 5: (2pts) Démontrer, dans le cas spécifique de la dimension 2, le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques.