

---

Examen - Session 2 - 19 juin 2025

---

**Durée : 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé**

Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

**Exercice 1 :** Soit  $n = 2^{1137}$ .

- Calculer le reste de la division euclidienne de  $n$  par 13 et par 17.
- En déduire le reste de la division euclidienne de  $n$  par 221.

**Exercice 2 :** Soit  $G$  un groupe abélien de cardinal 24. Notons  $f : G \rightarrow G$ , l'application définie par  $f(x) = x^5$ .

- Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes. Justifier.
- Déterminer  $\ker f$ .
- En déduire que  $f$  est un isomorphisme de groupes.
- Dans le cas où  $G = S_4$ , montrer que  $f$  n'est pas un morphisme de groupes.

**Exercice 3 :** Soit  $P = X^2 + 6X + 25$  et  $Q = X^4 + 6X^2 + 25$ .

- Quels sont les facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ ? dans  $\mathbb{C}[X]$ ?
- Mêmes questions pour le polynôme  $Q$ .

**Exercice 4 :** Soient  $p$  un nombre premier et  $G$  un groupe de cardinal  $p$ .

- Montrer que  $G$  est cyclique.
- Donner deux exemples de groupes (étudiés en cours) qui sont isomorphes à  $G$ .
- Est-ce qu'un groupe de cardinal 31 est abélien? Pourquoi.