
Examen - Session 1 - 15 mai 2025

Durée : 2h00. Aucun document ni calculatrice autorisé

Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1 :

- (Cours) Soient $(a, n, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Montrer que l'équation modulaire $ax \equiv b \pmod{n}$ d'inconnue x admet des solutions si et seulement si $a \wedge n$ divise b .
- Montrer que l'équation $126x \equiv 2 \pmod{230}$ admet des solutions. Trouver l'ensemble des solutions.

Exercice 2 : On considère la permutation $\sigma = (1\ 6)(1\ 5\ 4\ 7)(2\ 1\ 3\ 7)(1\ 3\ 6) \in S_8$.

- Calculer la signature de σ . Justifier vos calculs.
- Donner la décomposition de σ en produits de cycles disjoints.
- Calculer l'ordre de σ , puis l'ordre de σ^{2025} .
- Donner la décompositions de σ^{26} en produits de cycles disjoints.

Exercice 3 : Soit $G = \{e^{\frac{k\pi}{4}i} \mid k = 0, 1, \dots, 7\}$ et notons $P = X^8 - 1$ et $Q = X^6 - 1$.

- Montrer que (G, \times) est un sous-groupe cyclique de (\mathbb{C}^*, \times) . Quels sont les générateurs de G ?
- Déterminer le PGCD de P et Q .
- Déterminer la décomposition de P , puis de Q comme produits des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis de $\mathbb{R}[X]$. Retrouver le PGCD de P et Q .

Exercice 4 : Soient G un groupe fini de cardinal pair, et $f : G \rightarrow G$ une application pour laquelle on pose $f^2 = f \circ f$. On considère les deux parties

$$S = \{x \in G \mid f(x) = x^{-1}\} \quad \text{et} \quad H = \{x \in G \mid f^2(x) = x\} \quad \text{de } G.$$

- On suppose dans cette partie que f est un morphisme de groupes.
 - Montrer que H est un sous-groupe de G .
 - Montrer que si G est commutatif, alors S est un sous-groupe de H .
- On prend $G = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $f(x) = 2x$. Déterminer tous les éléments de S et de H .
- On prend $G = S_3$. On note $\tau = (1\ 2)$ et on considère $f(x) = \tau x \tau^{-1}$.
 - Démontrer que f est un morphisme de groupes et qu'il est bijectif.
 - Montrer que $H = G$.
 - Montrer que S admet exactement 4 éléments, que l'on déterminera.
 - Sans calcul déterminer si S est un sous-groupe de G .