2023-2024
L2 Licence de mathématiques
Structures Algébriques

Examen - Session 1 - 16 mai 2024

Durée : 2h00. Aucun document ni calculatrice autorisé

Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1 : On note $P(X) = -X^3 + 1$ et $Q(X) = X^2 + X$.

1. Calculer le polynôme $P \circ Q(X)$. Quel est son degré ?
2. Montrer que 1 est une racine de P.
   En déduire une factorisation de P comme un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que P et Q sont premier entre eux.

Exercice 2 :

1. Soient a, b, c des entiers non nuls tels que $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$. Montrer que $a \wedge bc = 1$.
2. (Ordre d'un entier modulo a) Soient $a, b \geq 2$ deux entiers. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists k > 0 \text{ tel que } b^k \equiv 1 \pmod{a} \iff a \wedge b = 1$$

   indication : pour $\Leftarrow$ penser à l'ordre de $\bar{b}$ dans un groupe bien choisi.
3. On veut montrer que si un entier n est premier avec 10, alors il existe un multiple de n qui s'écrit $11 \cdots 1$.
   a. Montrer que $9n$ est premier avec 10. En déduire qu'il existe un entier positif k tel que $10^k \equiv 1 \pmod{9n}$.
   b. Montrer que 9 divise $10^k - 1$. Quel est la valeur du quotient ?
   c. Conclure.

Exercice 3 : Soit le groupe $G = (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, +)$.

a. Quel est l'ordre de l'élément $\bar{9}$?
b. Déterminer les éléments $\bar{k} \in G$ tels que $G = \langle \bar{k} \rangle$.
c. Déterminer le plus petit sous-groupe H de G qui contient $\bar{6}$ et $\bar{8}$.

Exercice 4 : Soit $\sigma : \{1, 2, \ldots, 11, 12\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 11, 12\}$ la permutation :

$$\sigma = (1\ \ 2\ \ 5\ \ 7)(3\ \ 1\ \ 12\ \ 5\ \ 6)(2\ \ 6\ \ 11\ \ 10\ \ 9\ \ 8)(11\ \ 12)(5\ \ 7\ \ 2\ \ 12\ \ 3)$$

1. Donnez l'image par σ de chacun des entiers de 1 à 12.
2. Déterminer les orbites de σ. En déduire la décomposition de σ comme produit des cycles disjoints.
3. Donner l'ordre de σ.
4. Déterminer un élément de $\langle \sigma \rangle$ d'ordre n pour $n = 2, 4, 5, 6$ ou expliquer pourquoi il n'y en a pas.
5. A quel groupe est isomorphe $\langle \sigma^7 \rangle$? et le groupe $\langle \sigma^8 \rangle$? Dans chaque cas donner un isomorphisme.

Exercice 5 : (Bonus)

1. Justifier que l'équation $18u + 23v = 1$ admet des solutions et donner une solution particulière.
2. Déterminer toutes les solutions entières de $18x \equiv b$ [mod 23] où $b \in \mathbb{Z}$.