2022-2023
L2 Licence de mathématiques
Structures Algébriques

Examen - Session 2 - juin 2023

Durée : 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1 :

a. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, commutatif, non cyclique. Vrai ou faux ?

b. Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $x \in G$. Montrer que le sous-ensemble xHx^{-1} de G défini par $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | \ h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2 : Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupes

a. Supposons que $f(1) = -3$. Déterminer en justifiant $f(2)$, $f(-10)$ et $f(2023)$.

b. Montrer qu'il suffit de connaître $f(1)$ pour connaître l'image de chaque entier par f.

c. Existe-t-il un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui même tel que $f(2) = 3$?

d. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisant sur $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ pour qu'il existe un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui même tel que $f(2) = a$ et $f(5) = b$ est : $5a = 2b$.

Exercice 3 :

a. Quel est le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 3 ?

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 5 ?

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant $\begin{cases} x \equiv 2 & [\text{mod } 3] \\ x \equiv 1 & [\text{mod } 5] \end{cases}$

d. Déterminer le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.

Exercice 4 : Soit $\sigma \in S_{15}$ la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Ecrire σ comme produit des cycles disjoints.

b. Déterminer tous les éléments de $\langle \sigma \rangle$.

c. Quel est l'ordre de σ ? En déduire σ^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.