2022-2023
L2 Licence de mathématiques
Structures Algébriques

Examen - Session 1 - 10 mai 2023

Durée : 2h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1 : Soit p un nombre premier strictement positif différent de 2 et 3.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de p par 12 est 1, 5, 7 ou 11.
2. En déduire que $p^2 \equiv 1$ [mod 12].
3. **Application :** Quel est le reste de la division de $p^2 + 17$ par 12 ?

Exercice 2 :

1. Soient $(G, \cdot)$ et $(H, *)$ deux groupes quelconques.
   Montrer que l'ensemble $G \times H$ muni de la loi $(g, h) \diamond (g', h') = (g \cdot g', h * h')$ est un groupe.
2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{x}$, respectivement $\widetilde{x}$, la classe de congruence de x modulo 7, respectivement modulo 11. Notons ψ le morphisme de groupes défini par

$$\psi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +) \qquad \psi(x) = (\overline{x}, \widetilde{x})$$

   a. Résoudre le système de congruence $\begin{cases} x \equiv 5 & [7] \\ x \equiv 4 & [11] \end{cases}$. En déduire l'image réciproque $\psi^{-1}((5, 4))$.

   b. Montrer que ψ est surjectif. Quel est son noyau ?
3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{\overline{x}}$, respectivement $\widetilde{\widetilde{x}}$, la classe de congruence de x modulo 12, respectivement modulo 14. Notons ϕ le morphisme de groupes défini par

$$\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, +) \qquad \phi(x) = (\overline{\overline{x}}, \widetilde{\widetilde{x}})$$

   a. Résoudre le système de congruence $\begin{cases} x \equiv 7 & [12] \\ x \equiv 2 & [14] \end{cases}$ ou expliquer pourquoi il n'a pas de solution.

   b. Est-ce que ϕ est surjectif. Quel est son noyau ?

Exercice 3 : Soit $\sigma \in S_{15}$ la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 1 & 14 & 8 & 7 & 4 & 2 & 12 & 11 & 5 & 15 & 6 & 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\sigma(10)$, $\sigma^2(10)$ et $\tau \circ \sigma(4)$ où $\tau = (5\ 8)$.
2. Déterminer les orbites de σ. Ecrire σ comme produit des cycles disjoints.
3. Quel est l'ordre de σ ? σ^{21} ? σ^{31} ? σ^{56} ?
4. A quel groupe est isomorphe le groupe monogène $\langle \sigma \rangle$?

Exercice 4 : Soit $n > 1$ un entier positif.

1. (Cours) Soit $a \in \mathbb{Z}$ Montrer que : $\quad a \wedge n = 1 \iff \exists\, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$.
2. Déterminer le cardinal du groupe $((\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*, \times)$, puis l'ordre de $\overline{2}$ comme élément de ce groupe.
3. En déduire que $((\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique.
4. Soit $f : ((\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*, \times) \to (S_5, \circ)$ un morphisme de groupes.

   a. Montrer que f est complètement déterminé par l'image de $\overline{2}$.

   b. Déterminer l'image de f si $f(\overline{2}) = (1\ 2\ 3\ 4)$.
5. $(*)$ Montrer qu'il n'existe aucun morphisme de groupes $f : ((\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*, \times) \to (S_5, \circ)$ tel que $f(\overline{2}) = (2\ 5\ 3)$.