2021-2022
L2 Licence de mathématiques
Structures Algébriques

Examen - Session 2

Exercice 1 :

1. Quelle est la décomposition de 4512 come produit des nombres premiers ? Justifier.

2. Quel est le plus grand diviseur commun de 4512 et 4128 ?

3. Est-ce que l'équation diophantienne $4512x + 4128y = 144$ admet des solutions ? Pourquoi ? Si oui en donner l'ensemble des solutions.

4. Est-ce que l'équation diophantienne $4512x + 4128y = 96$ admet des solutions ? Pourquoi ? Si oui en donner l'ensemble des solutions.

Exercice 2 : Soient a, b, c et d des entiers.
Donner la définition de $\mathrm{PGCD}(a, b)$ puis démontrer les implications suivantes :

1. $\mathrm{PGCD}(a, b) = d \Rightarrow \mathrm{PGCD}(ac, bc) = dc$.

2. $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et $\mathrm{PGCD}(a, c) = 1 \Rightarrow \mathrm{PGCD}(a, bc) = 1$.

Exercice 3 : Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles du polynôme $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ pour $p \in \{2, 3\}$.

Exercice 4 : Soient les six fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = 1 - x \qquad f_4(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f_5(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f_6(x) = \frac{x-1}{x}$$

Notons que l'ensemble $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

1. Donner la table de loi de $(S, \circ)$.

2. En déduire l'élément neutre de S et l'inverse de tout élément de S.
Est-ce que S est un groupe commutatif ?

3. Déterminer l'ordre de tout élément de S.

4. Déterminer trois morphismes de groupes $\phi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \to (S, \circ)$.

5. On définit une relation sur S par

$$\forall x, y \in S \quad x \sim y \text{ si } \exists z \in S \text{ tel que } y = z \circ x \circ z^{-1}$$

a. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur S.

b. Montrer que si $x \sim y$ alors $o(x) = o(y)$.

c. Déterminer toutes les classes d'équivalence.