
Examen - Session 1 - 10 mai 2022

Durée : 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé

Toute réponse non justifiée est considérée comme zéro

Exercice 1 :

1. Soit \mathbb{K} un corps. Donner la définition d'un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$.
2. Quel est le plus petit nombre premier plus grand que 120 ? Justifier votre réponse.
3. Notons $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que $X^3 + X + \bar{1}$ et $X^2 + X + \bar{1}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 : Soient (G, \star) et (H, \heartsuit) deux groupes finis de cardinal n et m respectivement et soit $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. Soit $x \in G$. Montrer que $o(\phi(x))$ divise $o(x)$ et divise m .
Quelle est la relation entre $o(\phi(x))$ et $o(x) \wedge m$.
2. En déduire tous les morphismes de groupes $\phi : (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 3 : Soit H le groupe $((\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*, \times)$.

1. Quel est cardinal de ce groupe. Expliciter ses éléments.
2. Quels sont les ordres possibles des éléments de H ? Pourquoi ?
3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Notons $f_n : H \rightarrow H$ l'application définie par

$$\forall x \in H \quad f_n(x) = x^n$$

- a. Montrer que pour tout n , f_n est un morphisme de groupes.
- b. Dans le cas $n = 2$, pour tout $x \in H$ déterminer $f_2(x)$. En déduire le noyau et l'image de f_2 .
- c. Montrer que $\text{Im} f$ est un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*$.

Exercice 4 :

1. Soient a et b deux nombres complexes distincts.
 - a. Montrer, à l'aide de Bezout, que $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux.
 - b. Montrer alors que si les polynômes $(X - a)$ et $(X - b)$ divisent un polynôme P , alors le polynôme $(X - a)(X - b)$ divise P aussi.
2. Soit $P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 - 9X - 9$.
 - a. Montrer que -1 et 3 sont des racines de ce polynôme.
 - b. Déterminer la factorisation de P comme produits des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.