Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. Ces suites vérifient la relation d'équivalence $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

2. La série produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 0} c_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

3. Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est simplement convergente sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une fonction S définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \underset{n\to+\infty}{\to} S(x).$$

4. La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et son développement est donné par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

5. La formule de Parseval pour les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, s'écrit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right).$$

Exercice 1.

1.a. Comme la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, elle satisfait

$$\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}, \sin(x) > \sin(0) = 0.$$

Sachant que $\pi/2 > 1$, il découle de cette inégalité que

$$\forall 0 < x \leq 1, \sin(x) > 0.$$

b. Rappelons que

$$\forall n \geq 1, 0 < \frac{1}{n} \leq 1.$$

La question 1.a assure donc que

$$\forall n \geq 1, n \sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0,$$

de sorte que les logarithmes de ces nombres ont un sens, et la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.

2.a. Le développement limité en 0 de la fonction sinus s'écrit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Puisque

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

nous obtenons

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

puis

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b. La formule de la question 2.a assure que

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

soit

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x,$$

il vient

$$b_n = \ln\left(1 + n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Par définition de la relation d'équivalence, nous déduisons de la question 2.a que

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2},$$

et nous concluons par transitivité de la relation d'équivalence que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2}.$$

c. Rappelons que la série de Riemann de terme général $1/n^2$ est convergente, et qu'il en est donc de même de la série de terme général $-1/(6n^2)$. Il découle donc de la question 2.b et du principe d'équivalence que la série de terme général b_n est convergente.

3.a. Observons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et à termes strictement positifs, puisque nous avons établi à la question 1.b que

$$\forall n \geq 1, n\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Nous pouvons donc calculer le logarithme de chaque terme de cette suite et obtenir

$$\forall n \geq 1, \ln(a_n) = \ln\left(n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Comme
$$\forall a, b > 0, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$
nous savons que
$$\ln\Big(\prod_{k=1}^{n} k\sin\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(k\sin\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$
ce qui conduit à la formule
$$\forall n \geq 1, \ln(a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$
b. D'après la question 2.c, il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{\to} \ell.$$
La formule de la question 3.a garantit donc que
$$\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \ell.$$
Il suffit alors d'invoquer la continuité de la fonction exponentielle pour conclure que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{\ell}.$$
Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 2.

1.a. Par définition, nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)},$$
d'où le calcul
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n+1}.$$
b. Soit $x \in]0, +\infty[$. Nous vérifions que
$$\frac{1}{x+n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
Comme les fonctions f_n sont strictement positives sur $]0, +\infty[$, il découle de la question 1.a et du critère de d'Alembert que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. En particulier, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est simplement convergente sur $]0, +\infty[$.

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous observons que
$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n) \underset{x\to 0}{\to} 0,$$
puis, comme cette quantité est strictement positive pour $x > 0$, que
$$f_n(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \underset{x\to 0}{\to} +\infty.$$

Cette limite assure que

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = +\infty,$$

de sorte que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ n'est pas normalement convergente sur $]0,+\infty[$.

b. Soit $x \in [a,b]$. Nous savons que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x+k \geq a+k > 0,$$

ce qui fournit

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{x+k} \leq \frac{1}{a+k}.$$

Nous pouvons alors multiplier ces inégalités entre elles afin d'obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < f_n(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \leq \frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = f_n(a),$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq f_n(a),$$

et garantit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq f_n(a).$$

Cependant, il résulte de la définition de la borne supérieure que

$$f_n(a) = |f_n(a)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)|,$$

d'où la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

c. D'après la question 1.b, la série de terme général $f_n(a)$ est convergente. Il résulte donc de la question 2.b que la série de terme général $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)|$ est elle-aussi convergente. Par définition, cette propriété équivaut à la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ sur $[a,b]$.

3.a. D'après la question 3.c, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$. Comme chacune des fonctions f_n est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$, le théorème de préservation de la continuité garantit que la somme S est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Soit $x \in]0,+\infty[$. Par définition, nous avons

$$S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)},$$

de sorte que le changement d'indices $n = m+1$ conduit à l'expression

$$S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m+1)}.$$

Il suffit de multiplier cette formule par x pour obtenir

$$xS(x) = 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m+1)}.$$

Comme

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)},$$

nous concluons que

$$xS(x) = 1 + S(x+1).$$

c. D'après la question 3.b, nous savons que

$$\forall x \in]0, +\infty[, S(x) = \frac{1 + S(x+1)}{x}.$$

Comme la somme S est continue en 1 par la question 3.a, il vient

$$1 + S(x+1) \underset{x \to 0}{\to} 1 + S(1),$$

ce qui induit que

$$S(x) \underset{x \to 0}{\to} +\infty.$$

Exercice 3.

1.a. Nous démontrons ces inégalités par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n = 0$, nous savons que

$$u_0 = 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 0 \geq 0.$$

Supposons alors que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad u_k \geq 0 \quad \text{et} \quad v_k \geq 0.$$

Au rang $n+1$, nous déduisons de la définition des nombres u_{n+1} et v_{n+1}, et de l'hypothèse de récurrence que

$$u_{n+1} = u_n + 4v_n \geq 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + v_n \geq 0,$$

ce qui achève la preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

b. Nous montrons à nouveau cette inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n = 0$, nous avons

$$u_0 + v_0 = 1 = 5^0.$$

Supposons alors que

$$\forall 0 \leq k \leq n, u_k + v_k \leq 5^k.$$

Au rang $n+1$, nous déduisons de la définition des nombres u_{n+1} et v_{n+1} que

$$u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n + 5v_n.$$

Il suffit alors d'invoquer la question 1.a, puis l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$u_{n+1} + v_{n+1} \leq 5(u_n + v_n) \leq 5^{n+1},$$

ce qui achève la preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

c. Comme la suite $(5^n/n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives, nous sommes autorisés à écrire

$$\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^{n+1} n!}{5^n n!(n+1)} = \frac{5}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Il découle donc du critère de d'Alembert que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n}{n!} x^n$ est égal à $+\infty$.

d. Nous déduisons des questions 1.a et 1.b que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq \frac{5^n}{n!} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{v_n}{n!} \leq \frac{5^n}{n!}.$$

D'après la question 1.c et le principe de comparaison, nous savons donc que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n}{n!} x^n$, soit égal à $+\infty$.

2.a. Rappelons que les fonctions U et V sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que sommes de séries entières de rayon de convergence égal à $+\infty$. De plus, elles vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, V'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{v_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_{n+1}}{n!} x^n.$$

Nous déduisons donc de la définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que

$$U'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + 4v_n}{n!} x^n = U(x) + 4V(x),$$

tandis que

$$V'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + v_n}{n!} x^n = U(x) + V(x).$$

En particulier, ces formules assurent que

$$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) + 2V'(x) = 3\big(U(x) + 2V(x)\big) \quad \text{et} \quad U'(x) - 2V'(x) = -U(x) + 2V(x).$$

b. D'après la question 2.a, la fonction $U + 2V$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 3y(x),$$

dont la solution vaut

$$y(x) = y(0)e^{3x}.$$

Comme $U(0) + 2V(0) = 1$, il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) + 2V(x) = e^{3x}.$$

De même, la fonction $U - 2V$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = -z(x),$$

qui a pour unique solution

$$z(x) = z(0)e^{-x}.$$

Comme $U(0) - 2V(0) = 1$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) - 2V(x) = e^{-x}.$$

Il suffit de combiner les deux formules précédentes pour les fonctions $U + 2V$ et $U - 2V$ pour obtenir enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \frac{1}{2}\big(e^{3x} + e^{-x}\big) \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{1}{4}\big(e^{3x} - e^{-x}\big).$$

c. Rappelons que le développement en série entière de la fonction exponentielle s'écrit

$$\forall y \in \mathbb{R}, e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!},$$

de sorte que pour $y = 3x$ et $y = -x$, nous avons

$$e^{3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

D'après la question 2.b, nous concluons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{2n!} x^n \quad \text{et} \quad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{4n!} x^n,$$

et l'unicité des coefficients d'une série entière conduit aux formules

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.$$