Université de Cergy-Pontoise **Séries**
Licence 2 MIPI **2018-2019**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours. *(5 points)*

1. Donner la définition de la relation d'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

2. Donner la définition de la série produit de Cauchy de deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$.

3. Donner la définition de la convergence simple sur un intervalle I de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.

4. Donner la formule et l'intervalle de validité du développement en série entière de la fonction sinus.

5. Écrire la formule de Parseval pour les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. *(4 points)*

Soit

$$\forall n \geq 1, b_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

1.a. Vérifier que

$$\forall 0 < x \leq 1, \sin(x) > 0.$$

b. En déduire que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.

2.a. Vérifier que

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b. En déduire que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2}.$$

c. La série de terme général b_n est-elle convergente ?

3. Soit

$$\forall n \geq 1, a_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

a. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, \ln(a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

b. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

Exercice 2. *(5 points)*

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, f_n(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

1.a. Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{x+n+1}.$$

b. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $]0,+\infty[$?

2.a. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $]0,+\infty[$?

b. Soit $b > a > 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

c. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente sur $[a,b]$.

3. Soit

$$\forall x \in]0,+\infty[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

a. Montrer que la fonction S est continue sur $]0,+\infty[$.

b. Vérifier que

$$\forall x \in]0,+\infty[, xS(x) = 1 + S(x+1).$$

c. En déduire que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty.$$

Exercice 3. *(6 points)*

Soit $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + v_n.$$

1.a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad v_n \geq 0.$$

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n \leq 5^n.$$

c. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{5^n}{n!} x^n$?

d. En déduire le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} x^n$.

2. Soit

$$\forall x \in]-R,R[, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n.$$

a. Montrer que

$$\forall x \in]-R,R[, U'(x) + 2V'(x) = 3\big(U(x) + 2V(x)\big) \quad \text{et} \quad U'(x) - 2V'(x) = -U(x) + 2V(x).$$

b. En déduire que

$$\forall x \in]-R,R[, U(x) = \frac{1}{2}\big(e^{3x} + e^{-x}\big) \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{1}{4}\big(e^{3x} - e^{-x}\big).$$

c. Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}\big(3^n + (-1)^n\big) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{4}\big(3^n - (-1)^n\big).$$