Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. Ces suites vérifient la relation de comparaison $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement s'il existe un nombre positif M pour lequel

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \text{t.q.}\ \forall n \geq N, |u_n| \leq M|v_n|.$$

2. Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si

$$|q| < 1,$$

et dans ce cas, sa somme est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

3. Le théorème d'intégration sur un segment $[a,b]$ pour une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ s'énonce ainsi :
"Supposons que :
(i) Chacune des fonctions f_n est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$,
(ii) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur le segment $[a,b]$,
(iii) La somme S de cette série de fonctions est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.
Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente, et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.''$$

4. Une fonction $f :]-R,R[\to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$ si et seulement s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R, telle que

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 1.

1.a. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. Au rang $n = 1$, nous rappelons que

$$0 < \frac{\pi}{4} \leq 1,$$

de sorte que

$$0 < u_1 \leq \frac{1}{1}.$$

Supposons alors que

$$\forall 1 \leq k \leq n, 0 < u_k \leq \frac{1}{k}.$$

Nous obtenons

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique que

$$0 < \cos(u_n) \leq 1.$$

Il s'ensuit que

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui achève la récurrence, et confirme que

$$\forall n \geq 1, 0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

b. Comme

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

il résulte de la question 1.a et du théorème des gendarmes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite égale à 0.

2.a. Par définition, nous avons

$$\forall n \geq 2, nu_n = \cos(u_{n-1}).$$

Il suffit alors de combiner la question 1.b et la continuité de la fonction cosinus pour obtenir

$$\cos(u_{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

ce qui équivaut à

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Par définition, nous concluons que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

b. Nous avons établi à la question 1.a que

$$\forall n \geq 2, \cos(u_{n-1}) > 0.$$

Nous sommes donc autorisés à déduire de la question 2.a et de la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ que

$$\forall n \geq 2, n^\alpha u_n^\alpha = \cos(u_{n-1})^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 1^\alpha = 1.$$

Il s'ensuit que

$$u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Le principe d'équivalence et le critère de convergence des séries de Riemann assurent alors que la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n^\alpha$ est convergente si et seulement si

$$\alpha > 1.$$

Exercice 2.

1. Soit $r > 0$. Le théorème de croissance comparée assure que

$$\frac{r^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0, & \text{si } r \leq 1, \\ +\infty, & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Cette alternative est vraie pour toute sous-suite de la suite $\left(\frac{r^n}{n}\right)_{n\geq 1}$, en particulier pour la suite $\left(\frac{r^{n^2}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$. Nous avons donc

$$\frac{r^{n^2}}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0, & \text{si } r \leq 1, \\ +\infty, & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

La suite $\left(\frac{r^{n^2}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est donc bornée si et seulement si $0 \leq r \leq 1$. Par définition, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{n^2}$ est égal à 1.

2. Nous observons que

$$\forall n \geq 1, e^{-\ln(n)^a} > 0,$$

ce qui permet le calcul de

$$\left(e^{-\ln(n)^a}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln(n)^a}{n}}.$$

Si $a < 0$, nous savons que

$$\frac{\ln(n)^a}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

tandis que si $a > 0$, le théorème de croissance comparée assure que

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{a}}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui conduit à la limite

$$\frac{\ln(n)^a}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0, nous arrivons à

$$e^{-\frac{\ln(n)^a}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1.$$

Par le critère de Cauchy, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-\ln(n)^a} z^n$ est donc égal à 1 quel que soit le nombre réel non nul a.

Problème.

1.a. Nous calculons

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, il résulte du critère des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0)$ est convergente.

b. Nous observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

Sachant que $n+1 \geq 1$, cette identité conduit à l'inégalité

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx}.$$

c. Si $x > 0$, alors

$$0 < e^{-x} < 1,$$

de sorte que la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} \left(e^{-x}\right)^n = \sum\limits_{n\geq 0} e^{-nx}$ est convergente. D'après la question 1.b et le principe de comparaison, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Sachant que nous avons établi la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0)$ à la question 1.a, nous en déduisons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2.a. Rappelons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

Comme la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, nous avons

$$\frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{e^{-na}}{n+1} = |f_n(a)|,$$

lorsque $x \geq a$. Sachant que cette inégalité devient une égalité pour $x = a$, nous concluons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \geq a} |f_n(x)| = |f_n(a)|.$$

b. Nous avons établi à la question 1.b la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(a)$ lorsque $a > 0$. Par définition, ceci signifie que la série $\sum_{n\geq 0} |f_n(a)|$ est convergente. Par la question 2.a, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

c. Par la question 2.b, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Si $[a, b]$ désigne un segment de l'intervalle $]0, +\infty[$, alors le nombre a est strictement positif. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x)| \leq \sup_{x \geq a} |f_n(x)|,$$

il découle de la question 2.b et du principe de comparaison que la série $\sum_{n\geq 0} \sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x)|$ est convergente, ce qui équivaut à la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sur le segment $[a, b]$, soit sur tout segment de $]0, +\infty[$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $]0, +\infty[$, le théorème de continuité des séries de fonctions garantit que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.

3.a. Par les opérations élémentaires, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx}.$$

b. Nous déduisons de la question 3.a que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n'(x)| = \frac{n}{n+1} e^{-nx} \leq e^{-nx}.$$

Rappelons alors que la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de sorte que

$$|f_n'(x)| \leq e^{-na},$$

lorsque $x \geq a$. En particulier, nous obtenons

$$\sup_{x \geq a} |f_n'(x)| \leq e^{-na}.$$

c. Pour $a > 0$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} e^{-na}$ est convergente. Il découle donc de la question 3.b et du principe de comparaison que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

d. Nous savons que toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et par la question 1.c, que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur cet intervalle. La question 3.c assure que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Comme à la question 2.c, cette propriété assure que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n'(x)$ est normalement convergente sur tout segment de $]0, +\infty[$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx}.$$

4.a. Rappelons que la fonction $y \mapsto \ln(1+y)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$, et qu'elle vaut

$$\forall y \in]-1, 1[, \ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n.$$

b. Pour $x > 0$, nous avons

$$0 < e^{-x} < 1,$$

et nous pouvons utiliser le développement de la question 4.a afin d'écrire

$$\ln\left(1 + e^{-x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(e^{-x}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-nx}.$$

Le changement d'indice $n = m + 1$ conduit à la formule

$$\ln\left(1 + e^{-x}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-(m+1)x},$$

puis à l'identité

$$e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-mx} = F(x).$$