Université de Cergy-Pontoise **Séries**
Licence 2 MIPI **2017-2018**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les deux exercices et le problème sont indépendants.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Donner la définition de la relation de comparaison $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$.

2. Énoncer le critère de convergence des séries géométriques et donner la valeur de leur somme.

3. Énoncer le théorème d'intégration sur un segment pour une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.

4. Donner la définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$.

Exercice 1. *(4 points)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la formule de récurrence

$$u_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{\cos(u_n)}{n+1}.$$

1.a. Montrer que

$$\forall n \geq 1, 0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2.a. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

b. Déterminer l'ensemble des nombres réels α non nuls tels que la série de terme général u_n^α est convergente.

Exercice 2. *(2 points)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{n^2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-\ln(n)^a} z^n$ en fonction du nombre réel non nul a.

Problème. *(10 points)*

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-nx}.$$

1.a. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(0)$ est convergente.

b. Soit $x > 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq e^{-nx}.$$

c. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-nx}.$$

a. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \geq a} |f_n(x)| = |f_n(a)|.$$

b. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[a, +\infty[$?

c. La fonction F est-elle continue sur $]0, +\infty[$?

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $a > 0$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \geq a} |f'_n(x)| \leq e^{-na}.$$

c. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f'_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[a, +\infty[$?

d. La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$?

4.a. Développer la fonction $y \mapsto \ln(1 + y)$ en série entière.

b. En déduire que

$$\forall x > 0, F(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right).$$