Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann de paramètre α est la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Le théorème de conservation de la continuité s'énonce ainsi :

“ Supposons que :
(i) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I.
(ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur (tout segment de) I.

La fonction somme

$$\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

est alors bien définie et continue sur I. ”

3. Le lemme d'Abel s'énonce ainsi :

“ Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
(i) Si $|z| > R$, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est divergente.
(ii) Si $|z| < R$, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est (absolument) convergente. ”

4. Les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définis par les formules

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Exercice 1.

1.a. Rappelons que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big).$$

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, il s'ensuit que

$$\cos\Big(\frac{1}{n}\Big) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\cos\Big(\frac{1}{n}\Big) - 1 = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Par définition de la relation d'équivalence, nous obtenons

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Il suffit de multiplier cette équivalence par $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour arriver à

$$u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(-1)^n}{2n^{\frac{5}{2}}}.$$

b. Il découle de la question 1.a que

$$\left|u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ est convergente, par équivalence, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente.

2.a. Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère des séries alternées.

b. Par la question 1.b, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est aussi convergente par la question 2.a, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente en tant que somme de ces deux séries.

Exercice 2.

1.a. Nous calculons

$$\forall n \geq 1, f_n(1) = \frac{1^n}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2},$$

de sorte que la suite $(f_n(1))_{n\geq 1}$ a une limite $\frac{1}{2}$ non nulle. La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(1)$ est donc divergente.

b. Comme

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1[, 1 + x^{2n} \geq 1,$$

il vient

$$f_n(x) \leq \frac{x^n}{1} = x^n.$$

c. Rappelons que la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ est convergente lorsque $0 \leq x < 1$. Comme la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est à termes positifs, il découle de l'inégalité de la question 1.b et du principe de comparaison que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente lorsque $0 \leq x < 1$. Cette série de fonctions est par conséquent simplement convergente sur $[0,1[$.

d. Lorsque $x > 1$, nous avons

$$\frac{1}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Il s'ensuit que

$$x^n f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{0+1} = 1,$$

ce qui équivaut au fait que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}.$$

e. Lorsque $x > 1$, nous savons que $\frac{1}{x} < 1$, ce qui assure que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{x^n} \left(= \sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{x}\right)^n \right)$ est convergente. Il résulte donc de la question 1.d et du principe d'équivalence que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente lorsque $x > 1$. Aussi cette série de fonctions est-elle simplement convergente sur $]1, +\infty[$.

f. Rappelons que la somme $S(x)$ est bien définie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente. Il découle donc de la simple convergence de cette série de fonctions sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ que la somme S est bien définie sur ces deux intervalles.

2.a. Par les opérations élémentaires, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et elles satisfont

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - x^n(2nx^{2n-1})}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1} - nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

b. Nous déduisons de la question 2.a que

$$\forall x \in [0, 1[, f_n'(x) \geq 0,$$

d'où la croissance des fonctions f_n sur l'intervalle $[0, 1[$. Comme les fonctions f_n sont à valeurs positives, il s'ensuit que

$$\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1[} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{2}.$$

c. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2}$ est grossièrement divergente, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)|$ est divergente. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ n'est donc pas normalement convergente sur $[0, 1[$.

3.a. Rappelons que la fonction f_n est croissante sur $[0, 1[$, de sorte que

$$\forall x \in [0, a], f_n(x) \leq f_n(a) = \frac{a^n}{1 + a^{2n}}.$$

Comme $1 + a^{2n} \geq 1$, nous concluons que

$$\forall x \in [0, a], f_n(x) \leq a^n.$$

b. Comme les fonctions f_n sont positives, il découle de la question 3.a que

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq a^n.$$

Comme $0 \leq a < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ est convergente. Il résulte donc du principe de comparaison que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est normalement convergente sur $[0, a]$.

c. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $[0, 1[$. Notons $\beta = a$. Nous savons que

$$[\alpha, \beta] \subset [0, a],$$

ce qui entraîne que

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)|.$$

Par le principe de comparaison, comme la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est normalement convergente sur $[0,a]$, elle l'est aussi sur $[\alpha,\beta]$. Elle est donc normalement convergente sur tout segment de $[0,1[$. En outre, les fonctions f_n sont continues sur $[0,1[$, et le théorème de conservation de la continuité assure que la somme S est continue sur $[0,1[$.

d. Par définition, nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = S\left(\frac{1}{x}\right).$$

e. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$, et la fonction S est continue sur $]0,1[$ par la question 3.c, la fonction $x \mapsto S\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$ par composition de fonctions continues. Par la question 3.d, ceci revient exactement à la continuité de la fonction S sur $]1,+\infty[$.

Exercice 3.

1.a. Nous savons que

$$a_0 = f(0).$$

Comme la fonction f est solution de l'équation différentielle (ED), il vient

$$a_0 = f(0) = 1.$$

b. Rappelons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)a_{m+1}x^m.$$

Il s'ensuit que

$$(2-3x)f'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1)a_{m+1}x^m - \sum_{n=1}^{+\infty} 3na_nx^n = 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2(n+1)a_{n+1} - 3na_n\big)x^n.$$

De manière similaire, nous avons

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{m=1}^{+\infty} (m+1)ma_{m+1}x^{m-1},$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} x(1-x)f''(x) =& \sum_{m=1}^{+\infty} (m+1)ma_{m+1}x^m - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n \\ =& 2a_2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n\big)x^n. \end{aligned}$$

c. Il résulte de la question 1.b que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x)f''(x) + (2-3x)f'(x) - f(x)$$
$$=2a_1 - a_0 + \big(6a_2 - 4a_1\big)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+1} - (n+1)^2 a_n\big)x^n.$$

Comme la fonction f satisfait l'équation différentielle (ED), le membre gauche de cette identité est nulle. L'unicité des coefficients d'une série entière assure alors que

$$\begin{cases} 2a_1 = a_0, \\ 6a_2 = 4a_1, \\ \forall n \geq 2, (n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)^2 a_n, \end{cases}$$

ce qui équivaut à l'expression

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n.$$

2.a. Comme $a_0 = 1 > 0$, il découle de la question 1.c et d'une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0.$$

b. D'après la question 2.a, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous non nuls. D'après la question 1.c, elle vérifie

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est donc égal à 1.

c. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est égal à 1, la somme f de cette série est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R, R[$ pour $R = 1$. Les calculs précédents sont justifiés sur cet intervalle. La fonction f est donc une solution de l'équation (ED) sur l'intervalle $]-1, 1[$, qui est développable en série entière sur cet intervalle.

3.a. Nous vérifions par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

b. Rappelons que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$, et que son développement est donné par la formule

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Ceci assure que la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est aussi développable en série entière sur $]-1, 1[$, et que son développement vaut

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

c. D'après la question 3.b, le changement d'indice $m = n - 1$ conduit à l'expression

$$\forall x \in]-1,1[, -\ln(1-x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Lorsque $x \neq 0$, nous obtenons

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m+1} = f(x),$$

par la question 3.a. La question 1.a assure par ailleurs que

$$f(0) = 1,$$

ce qui permet de conclure.