Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Donner la définition des séries de Riemann et leur critère de convergence.

2. Donner l'énoncé du théorème de conservation de la continuité pour une série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

3. Donner l'énoncé du lemme d'Abel pour la convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

4. Donner la définition des coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'une fonction f 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. *(3 points)*
Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

1.a. Montrer que

$$u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(-1)^n}{2n^{\frac{5}{2}}}.$$

b. En déduire que la série de terme général $u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est absolument convergente.

2.a. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

b. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2. *(7 points)*
Soit

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

1.a. La série de terme général $f_n(1)$ est-elle convergente ?

b. Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,1[,\ f_n(x) \leq x^n.$$

c. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $[0,1[$?

d. Soit $x > 1$. Montrer que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}.$$

e. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $]1,+\infty[$?

f. Soit

$$\forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Conclure que la fonction S est bien définie sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

2.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \ \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| = \frac{1}{2}.$$

c. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[0,1[$?

3.a. Soit $0 < a < 1$. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \ \forall x \in [0,a], \ f_n(x) \leq a^n.$$

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[0,a]$?

c. En déduire que la fonction S est continue sur $[0,1[$.

d. Vérifier que

$$\forall x \in]1,+\infty[, S(x) = S\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

e. La fonction S est-elle continue sur $]1,+\infty[$?

Exercice 3. *(6 points)*

Nous cherchons à résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} x(1-x)y''(x) + (2-3x)y'(x) - y(x) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{ED}$$

1. Nous supposons qu'il existe un nombre $R > 0$, et une fonction f développable en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$ sous la forme

$$\forall x \in]-R,R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

qui est solution de l'équation (ED) sur l'intervalle $]-R,R[$.

a. Quelle est la valeur du coefficient a_0 ?

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (2-3x)f'(x) = 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2(n+1)a_{n+1} - 3na_n\big)x^n,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x)f''(x) = 2a_2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n\big)x^n.$$

c. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n.$$

2.a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0.$$

b. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$?

c. Existe-t-il une solution f de l'équation (ED) qui soit développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-R,R[$, avec $R > 0$?

3.a. Montrer que

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

b. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ en série entière.

c. Conclure que

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$