Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. L'exercice et le problème sont indépendants.

Questions de cours.

1. Donner la définition de la relation de comparaison $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

2. Donner la définition de la convergence absolue d'une série de terme général w_n.

3. Donner la définition de la convergence normale de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur un intervalle I.

4. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R. Donner la définition de la série dérivée de cette série entière, et la valeur du rayon de convergence de cette série dérivée.

5. Écrire la formule de Parseval pour les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'une fonction f définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice.

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

1.a. Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ \sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}.$$

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $]0,+\infty[$?

2. Soit

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

a. Montrer que la fonction S est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que sa dérivée vaut

$$\forall x \in]0,+\infty[, S'(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}.$$

c. La fonction S est-elle décroissante sur $]0,+\infty[$?

3.a. Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[, S(x+1) - S(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

b. En déduire que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty.$$

4.a. Vérifier que

$$\forall N \geq 1, S(N) = \sum_{p=N}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

b. Conclure que
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

Problème.

Soit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, et
$$\forall n \geq 2, a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}.$$
Notons R, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, et S, sa somme qui est définie par
$$\forall x \in]-R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1.a. Vérifier que
$$0 \times a_0 \leq 1 \times a_1 \leq 2 \times a_2 \leq 3 \times a_3 \leq 4 \times a_4.$$

b. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n}\Big(na_n - (n-2)a_{n-2} + \frac{n-4}{2}a_{n-2}\Big).$$

c. Établir par récurrence sur l'entier n que
$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} \geq na_n.$$

d. Quel est le signe des nombres a_n ?

2.a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell > 0$. Montrer que
$$a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ell}{2(n+1)}.$$

c. Quelle est alors la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$?

d. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle alors convergente ?

e. Conclure que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

f. En déduire que
$$R \geq 1.$$

3.a. Vérifier que
$$\forall n \geq 1, a_n \geq \frac{1}{n}.$$

b. La série de terme général a_n est-elle convergente ?

c. Quelle est la valeur du rayon R ?

4.a. La somme S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$?

b. Montrer que
$$\forall x \in]-R, R[, 2(x-1)S'(x) = (x^2-2)S(x).$$

c. En déduire que
$$\forall x \in]-R, R[, \Big(\sqrt{1-x}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)} S(x)\Big)' = 0.$$

d. Conclure que
$$\forall x \in]-R, R[, S(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}.$$