Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites réelles ou complexes. Ces suites vérifient la relation de comparaison $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

2. La série de terme général w_n est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $|w_n|$ est convergente.

3. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|.$$

La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur I si et seulement si la série de terme général S_n est convergente.

4. La série dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est la série entière

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Son rayon de convergence est égal au rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

5. La formule de Parseval pour les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ s'écrit :

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \left(= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\right).$$

Exercice.

1.a. Soit $n \geq 1$. La fonction f_n se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, dont la dérivée est égale à

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f_n'(x) = -\frac{2}{(n+x)^3} \leq 0.$$

La fonction f_n est donc décroissante sur $]-1, +\infty[$. Comme elle est aussi positive sur cet intervalle, elle satisfait

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in]0,+\infty[} f_n(x) = \max_{x\in [0,+\infty[} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n^2}.$$

b. La série de Riemann de terme général $1/n^2$ est convergente. D'après la question 1.a, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est donc normalement convergente sur $]0, +\infty[$.

2.a. Comme la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur $]0,+\infty[$, elle est simplement convergente sur cet intervalle. Les séries $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ sont donc convergentes pour tout nombre $x \in]0,+\infty[$. Aussi la fonction somme S est-elle bien définie sur $]0,+\infty[$.

De plus, les fonctions f_n sont continues sur $]0,+\infty[$. Comme la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur $]0,+\infty[$, le théorème de continuité des séries de fonctions assure que la somme S est continue sur $]0,+\infty[$.

b. Soit $n \geq 1$. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et les dérivées f_n' satisfont

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n'(x)| = \frac{2}{n^3}.$$

Ces dérivées se prolongent en effet en fonctions négatives, croissantes et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, qui vérifient

$$f_n'(0) = -\frac{2}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $2/n^3$ est convergente, la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur $]0,+\infty[$. Par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions, la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in]0,+\infty[, S'(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}.$$

c. Il s'ensuit que la dérivée S' est négative sur $]0,+\infty[$, de sorte que la fonction S est décroissante sur cet intervalle.

3.a. Par linéarité, la fonction S satisfait

$$\forall x \in]0,+\infty[, S(x+1) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(n+1+x)^2} - \frac{1}{(n+x)^2}\Big).$$

Comme

$$\frac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

cette série télescopique vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(n+1+x)^2} - \frac{1}{(n+x)^2}\Big) = -\frac{1}{x^2},$$

d'où l'identité à démontrer.

b. Comme la fonction S est continue sur $]0,+\infty[$, elle vérifie

$$S(x+1) \underset{x\to 0}{\to} S(1).$$

De plus,

$$\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} +\infty,$$

de sorte que, d'après la question 3.a,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty.$$

4.a. Par définition,

$$\forall N \geq 1, S(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+N)^2}.$$

Le changement d'indice $p = n + N$ conduit alors à la formule

$$S(N) = \sum_{p=N}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

b. Comme la série de Riemann de terme général $1/p^2$ est convergente, son reste vérifie

$$\sum_{p=N}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \underset{N \to +\infty}{\to} 0,$$

de sorte que

$$S(N) \underset{N \to +\infty}{\to} 0.$$

Comme la fonction S est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, elle a une limite en $+\infty$, et cette limite est donc égale à 0.

Problème.

1.a. Par définition,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{17}{24}.$$

Comme

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq \frac{5}{2} \leq \frac{17}{6},$$

l'inégalité à démontrer est bien satisfaite.

b. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - \frac{a_{n-2}}{2} = \frac{1}{n}\Big(na_n - \frac{n}{2}a_{n-2}\Big).$$

La formule

$$\frac{n}{2} = n - 2 - \frac{n-4}{2},$$

conduit alors à l'identité à établir.

c. L'inégalité se montre par récurrence sur l'entier $n \geq 3$. D'après la question 1.a, au rang $n = 3$, il vient

$$2a_2 \leq 3a_3 \leq 4a_4.$$

Supposons que

$$\forall 3 \leq p \leq n, (p-1)a_{p-1} \leq pa_p \leq (p+1)a_{p+1}.$$

Au rang $n+1$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que

$$(n-1)a_{n-1} \leq na_n \leq (n+1)a_{n+1}.$$

Il vient de plus

$$(n-1)a_{n-1} \geq 2a_2 > 0,$$

de sorte que le nombre a_{n-1} est strictement positif. Enfin, la formule de la question 1.b s'écrit

$$(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\Big((n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}+\frac{n-3}{2}a_{n-1}\Big),$$

ce qui implique que

$$(n+2)a_{n+2}\geq (n+1)a_{n+1},$$

et achève la preuve de l'hérédité de l'hypothèse de récurrence. D'après la question 1.a, il s'ensuit que

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n+1)a_{n+1}\geq na_n.$$

d. D'après la question 1.c, les nombres a_n satisfont

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, na_n\geq 1,$$

et ils sont donc strictement positifs, de même que a_0.

2.a. D'après la question 1.d,

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}-a_n=-\frac{a_{n-2}}{2(n+1)}\leq 0,$$

et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

b. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ et $\ell>0$, il vient

$$\frac{\frac{a_{n-2}}{2(n+1)}}{\frac{\ell}{2(n+1)}}=\frac{a_{n-2}}{\ell}\underset{n\to+\infty}{\to}1,$$

ce qui induit que

$$a_{n+1}-a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ell}{2(n+1)}.$$

c. Étant donné que

$$-\frac{\ell}{2(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ell}{2n},$$

et que la série de Riemann de terme général $-\ell/(2n)$ est divergente, la série de terme général $-\ell/(2(n+1))$ est aussi divergente, de même que la série de terme général $a_{n+1}-a_n$ par l'équivalent de la question 2.b.

d. La série de terme général $a_{n+1}-a_n$ est télescopique. Elle est convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'après la question 2.c, cette suite est donc divergente.

e. D'après les questions 1.d et 2.a, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, de sorte qu'elle est convergente vers un nombre $\ell\geq 0$. Si $\ell>0$, alors, la question 2.d implique qu'elle est divergente, ce qui est absurde. En conclusion, $\ell=0$, et

$$a_n\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

f. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. La définition du rayon de convergence R induit alors que

$$R\geq 1.$$

3.a. Il résulte de la question 1.c que

$$\forall n \geq 1, na_n \geq a_1 = 1,$$

ce qui entraîne l'inégalité à montrer.

b. La série de Riemann de terme général $1/n$ est divergente. Il découle du théorème de comparaison et de la question 3.a que la série de terme général a_n est elle-aussi divergente.

c. Si $R > 1$, alors, la série de terme général $a_n 1^n = a_n$ est convergente, ce qui contredit la question 3.b. Il s'ensuit que $R \leq 1$, puis, d'après la question 2.f, que $R = 1$.

4.a. Le théorème de régularité des séries entières assure que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$, soit ici sur $]-1, 1[$.

b. De plus, la dérivée S' est égale à

$$\forall x \in]-1,1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

de sorte que

$$\forall x \in]-1,1[, 2(x-1)S'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big)x^n.$$

Par ailleurs, le changement de variable $n = m+2$ aboutit à

$$\forall x \in]-1,1[, x^2 S(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^{m+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n,$$

ce qui mène à l'expression

$$\forall x \in]-1,1[, 2(x-1)S'(x) - (x^2-2)S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(a_n - a_{n+1})x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n.$$

La définition récursive de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit alors que

$$\forall x \in]-1,1[, 2\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)(a_n - a_{n+1})x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n = 0,$$

de sorte que

$$\forall x \in]-1,1[, 2(x-1)S'(x) - (x^2-2)S(x) = 2(0+1)(a_0 - a_1) + 2(1+1)(a_1 - a_2)x = 0.$$

c. Soit

$$\forall x \in]-1,1[, F(x) = \sqrt{1-x}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, S(x).$$

D'après la question 4.a, la fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. De plus sa dérivée est égale à

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, F'(x) =& -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, S(x) - \sqrt{1-x}\,\frac{x+1}{2}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, S(x)\\ &+ \sqrt{1-x}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, S'(x)\\ =&\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, \Big((x^2-2)S(x) - 2(x-1)S'(x)\Big)\\ =&0.\end{aligned}$$

d. Il suffit d'intégrer la formule de la question 4.c pour obtenir que

$$\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1-x}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)}\, S(x) = S(0).$$

Comme $S(0) = a_0 = 1$, il vient finalement

$$\forall x \in]-1,1[, S(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}.$$