Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. Ces suites vérifient la relation de comparaison $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

2. Le critère de d'Alembert s'énonce ainsi :

“ Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls tels que :

- les nombres w_n sont non nuls à partir d'un certain rang,
- il existe un nombre $\lambda \in [0, +\infty]$ tel que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$.

Alors :

- si $0 \leq \lambda < 1$, la série de terme général w_n est convergente,
- si $1 < \lambda \leq +\infty$, la série de terme général w_n est divergente,
- si $\lambda = 1$, la série de terme général w_n peut être convergente ou divergente. ”

3. Le théorème de conservation de la dérivabilité pour une série de fonctions de terme général $f_n(x)$ s'énonce ainsi :

“ Supposons que :
(i) les fonctions f_n sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
(ii) la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente sur I,
(iii) la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur (tout segment de) I.
Alors la fonction somme f définie par

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et sa dérivée est donnée par la formule

$$\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x). \text{ ”}$$

4. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\big\{r \in \mathbb{R}_+, \text{ t.q. } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\big\}.$$

5. Les coefficients de Fourier complexes d'une fonction f 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ sont définis par les formules

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \left(= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\right).$$

Exercice 1.

1. Par définition, nous avons

$$u_{n-1} - u_n = \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)},$$

de sorte qu'en réduisant au même dénominateur, nous obtenons

$$u_{n-1} - u_n = \frac{1+a_n-1}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)} = v_n.$$

2. Nous calculons alors

$$V_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(u_{k-1} - u_k\big) = v_0 + u_0 - u_n.$$

Il suffit alors de vérifier que

$$u_0 + v_0 = \frac{1}{1+a_0} + \frac{a_0}{1+a_0} = 1,$$

pour établir la formule recherchée.

3. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq 1,$$

ce qui induit que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. La série de terme général v_n est convergente, puisqu'elle est à termes positifs et que ses sommes partielles V_n sont majorées.

Exercice 2.

1. Les fonctions f_n sont bien définies sur $]0, +\infty[$. Étant donné un nombre $x \in]0, +\infty[$ fixé, elles vérifient

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+x} \to 0 \times \frac{1}{x} = 0,$$

lorsque $n \to +\infty$. La suite de fonctions $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est donc simplement convergente sur $]0, +\infty[$, et sa limite simple est la fonction identiquement nulle.

2.a. Nous calculons

$$n^2 x f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+x} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{x}{0+x} = 1,$$

ce qui induit que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}.$$

b. Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ est convergente, l'équivalent précédent garantit la convergence de la série de terme général $f_n(x)$ pour tout nombre $x \in]0, +\infty[$. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est donc simplement convergente sur $]0, +\infty[$.

3.a. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$, et sa dérivée est égale à

$$f_n'(x) = -\frac{n^2}{(n+n^2x)^2}.$$

Comme cette quantité est négative, la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. De plus, elle est positive sur cet intervalle, de sorte que

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} f_n(x) = f_n(a) = \frac{1}{n+n^2a}.$$

b. D'après la question 2.b, la série de terme général $f_n(a)$ est convergente. Il s'ensuit que la série de terme général $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)|$ est aussi convergente. Par définition, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

c. Rappelons que les fonctions f_n sont bien définies et continues sur $]0, +\infty[$. De plus, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur tous les intervalles de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, donc sur tout segment de $]0, +\infty[$. Le théorème de conservation de la continuité assure alors que la somme F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

1. Le coefficient b_0 est égal à

$$b_0 = f(0) = 0.$$

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}.$$

Le changement d'indice $m = n - 1$ conduit à la formule

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) b_{m+1} x^m$$

Nous observons par ailleurs que

$$-2xf(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2b_n x^{n+1},$$

de sorte que le changement d'indice $m = n + 1$ fournit la formule

$$-2xf(x) = -\sum_{m=1}^{+\infty} 2b_{m-1} x^m.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\forall x \in]-R,R[,\ 1 = f'(x) - 2xf(x) = b_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \Big((m+1)b_{m+1} - 2b_{m-1}\Big) x^m.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, il s'ensuit que

$$b_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ b_{n+1} = \frac{2}{n+1} b_{n-1}.$$

3. La preuve se fait par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n = 0$, nous avons bien

$$b_0 = 0, \quad \text{et} \quad b_1 = 1 = \frac{4^0\, 0!}{1!}.$$

Supposons que la formule soit vraie jusqu'au rang n. Au rang $n+1$, il découle de la question 2. que

$$b_{2(n+1)} = \frac{2}{2(n+1)} b_{2n} = 0,$$

tandis que

$$\begin{aligned} b_{2(n+1)+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} b_{2n+1} = \frac{2 \times 4^n \, n!}{(2n+3)\,(2n+1)!} &= \frac{4 \times 4^n \,(n+1)\, n!}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\,(n+1)!}{(2(n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

Par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, nous concluons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = 0, \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = \frac{4^n \, n!}{(2n+1)!}.$$

4. Soit $x > 0$. Appliquons le critère de d'Alembert à la série de terme général strictement positif

$$\beta_n = \frac{4^n \, n! \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Nous calculons

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{4\,(n+1)\, x^2}{(2n+3)\,(2n+2)} = \frac{2\, x^2}{2n+3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série de terme général β_n est donc convergente quelle que soit la valeur du nombre strictement positif x. Le lemme d'Abel assure alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n n!}{(2n+1)!} \, x^{2n+1}$ est égal à $+\infty$.

5. La somme f de cette série entière est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Les calculs précédents sont justifiés sur cet intervalle. La fonction f est donc une solution de l'équation (EqDiff) sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, qui est développable en série entière sur cet intervalle.