Université de Cergy-Pontoise **Séries**
Licence 2 MIPI **2016-2017**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours.

1. Donner la définition de la relation d'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

2. Énoncer le critère de d'Alembert pour la convergence d'une série de terme général w_n positif.

3. Donner l'énoncé du théorème de conservation de la dérivabilité pour une série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

4. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

5. Donner la définition des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Nous nous intéressons aux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les expressions

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)}, \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1. Soit
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)}.$$
Calculer $u_{n-1} - u_n$ en fonction de v_n pour tout entier $n \geq 1$.

2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 1 - u_n.$$

3. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ?

4. La série de terme général v_n est-elle convergente ?

Exercice 2.

Soit $(f_n(x))_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies par

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est-elle simplement convergente sur $]0,+\infty[$? Si oui, quelle est sa limite simple ?

2.a. Soit $x > 0$. Montrer que
$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}.$$

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $]0, +\infty[$?

3.a. Soit $a > 0$. Étant donné un entier $n \geq 1$, montrer que

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n + n^2 a}.$$

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[a, +\infty[$?

c. Soit

$$\forall x > 0, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

En déduire que la fonction F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

Nous cherchons à résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x) - 2xf(x) = 1, \\ f(0) = 0. \end{cases} \tag{EqDiff}$$

Nous supposons qu'il existe un nombre $R > 0$ (ou $R = +\infty$), et une fonction f développable en série entière sur l'intervalle $] - R, R[$ sous la forme

$$\forall x \in] - R, R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

qui est solution de l'équation (EqDiff) sur l'intervalle $] - R, R[$.

1. Quelle est la valeur du coefficient b_0 ?

2. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients b_{n+1} et b_{n-1}.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = 0, \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = \frac{4^n \, n!}{(2n+1)!}.$$

4. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n \, n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$?

5. Existe-t-il une solution f de l'équation (EqDiff) qui soit développable en série entière sur un intervalle de la forme $] - R, R[$, avec $R > 0$ (ou $R = +\infty$) ?