# Corrigé du devoir surveillé N°3

**Questions de cours.**

1. Le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup \big\{ r \in \mathbb{R}_+, \text{t.q. } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \big\}.$$

2. Le critère de d'Alembert s'énonce ainsi :

“ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls à partir d'un certain rang. S'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\Big| \frac{a_{n+1}}{a_n} \Big| \underset{n\to+\infty}{\to} l,$$

alors, le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est égal à

$$R = \frac{1}{l},$$

avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$. ”

3. La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et elle vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**Problème.**

1.a. Par définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^d}{n^d(n+1)} = \frac{1}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^d.$$

Par continuité de la fonction $t \mapsto t^d$ en 1, il vient

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^d \underset{n\to+\infty}{\to} 1^d = 1,$$

de sorte que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

b. Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, il résulte du critère de d'Alembert que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est égal à $+\infty$.

2.a. Par définition de la suite $(a_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$, nous savons que

$$\frac{p!\,n!\,a_n^{(p)}}{n^p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p} = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{p-1}{n}\Big).$$

Comme cette expression contient un nombre fini de produits, sa limite lorsque $n \to +\infty$ est égale à 1. Aussi avons-nous vérifié que

$$a_n^{(p)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!\,n!}.$$

b. Il résulte de l'équivalent précédent que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^{(p)} z^n$ est égal à celui de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^p}{p!\,n!} z^n$, lequel est égal à $+\infty$ d'après la question 1.b.

c. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^{(p)} z^n$ est égal à $+\infty$, l'intervalle de convergence de sa somme $S_p$ est égal à $\mathbb{R}$.

d. La somme $S_p$ est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la suite $(a_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall 0 \leq n \leq p-1, a_n^{(p)} = 0,$$

d'où les identités

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, S_p(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n^{(p)} x^n &= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!\,n!} x^n \\ &= \frac{x^p}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n!} x^{n-p}.\end{aligned}$$

e. Par le changement d'indice $m = n - p$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_p(x) = \frac{x^p}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{x^p}{p!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = \frac{x^p\,e^x}{p!}.$$

3.a. Les nombres $P(n)$ s'écrivent sous la forme

$$P(n) = n^d\Big(a_d + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{n^{d-k}}\Big).$$

Pour $0 \leq k \leq d-1$, il vient

$$\frac{1}{n^{d-k}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

de sorte que, par linéarité de la limite,

$$\frac{P(n)}{a_d\,n^d} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Il s'ensuit que

$$P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_d\,n^d,$$

puis que

$$\frac{P(n)}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_d\,n^d}{n!}.$$

b. Il découle de cet équivalent que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$ est égal à celui de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^d}{n!} z^n$, soit, d'après la question 1.b, à $+\infty$.

c. Comme le degré des polynômes $L_p$ est égal à $p$, la famille de polynômes $(L_p)_{0\leq p\leq d}$ est échelonnée, et elle forme donc une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $d$.

d. Le degré du polynôme $P$ est égal à $d$. Ce polynôme appartient donc à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$. Par définition d'une base, il existe un unique $d+1$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P(X) = \sum_{p=0}^{d} \alpha_p L_p(X).$$

e. D'après la question 3.b, la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après la question 3.d, elle vaut de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{d} \frac{\alpha_p L_p(n)}{n!} \right) x^n.$$

Par linéarité des séries entières, il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n = \sum_{p=0}^{d} \alpha_p S_p(x) = \sum_{p=0}^{d} \frac{\alpha_p x^p e^x}{p!},$$

où nous avons utilisé la formule pour les sommes $S_p$ de la question 2.e.

4.a. D'après la question 3.d, le polynôme $Q(X) = X^2 - X + 1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$Q(X) = \beta_0 L_0(X) + \beta_1 L_1(X) + \beta_2 L_2(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \frac{\beta_2}{2} X(X-1),$$

avec $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$. La spécialisation de cette égalité en 0, 1 et 2 fournit le système

$$\begin{cases} \beta_0 = Q(0) = 1, \\ \beta_0 + \beta_1 = Q(1) = 1, \\ \beta_0 + 2\beta_1 + \beta_2 = Q(2) = 3, \end{cases}$$

ce qui donne les valeurs

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \text{et} \quad \beta_2 = 2.$$

b. D'après la question 3.b, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+1}{n!} z^n$ est égal à $+\infty$. Il découle alors des questions 3.e et 4.a que la somme de cette série entière vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n!} x^n = \sum_{p=0}^{2} \frac{\beta_p x^p e^x}{p!} = \left(1 + x^2\right) e^x.$$