Corrigé du devoir surveillé N°2

Questions de cours.

1. Par convergence simple, la fonction f est croissante sur I.

2. Soit
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|.$$
La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur I si et seulement si la série de terme général S_n est convergente.

3. Le théorème de continuité de la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ s'énonce ainsi :

“ Supposons que :
(i) les fonctions f_n sont bien définies et continues sur I,
(ii) la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur tout segment de I.
Alors la fonction somme f définie par
$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$
est bien définie et continue sur I. ”

Problème.

1.a. Lorsque $x = 0$, nous savons que
$$f_n(0) = 0.$$
La série de terme général $f_n(0)$ est donc convergente, et la somme de cette série est égale à 0.

b. Lorsque $x \neq 0$, les nombres $|f_n(x)|$ sont strictement positifs dès que $n \neq 0$, et ils vérifient
$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{n+1}{n} e^{-x^2} \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-x^2}.$$

c. Lorsque $x \neq 0$, le nombre e^{-x^2} est strictement inférieur à 1. Par le critère de d'Alembert, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. En conclusion, cette série converge simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d. Chacune des fonctions f_n est impaire sur $\mathbb{R}$. Par linéarité, il s'ensuit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2} = -f(x).$$
La somme f est donc impaire sur $\mathbb{R}$.

2.a. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elles vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = n\big(1 - 2nx^2\big)e^{-nx^2}.$$

b. Comme

$$ue^{-u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0,$$

il vient

$$nx^2e^{-nx^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0,$$

de sorte que

$$nxe^{-nx^2} = \frac{1}{x} \times nx^2e^{-nx^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

c. D'après la question 2.a, les fonctions f_n sont croissantes sur l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}]$, puis décroissantes sur l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty[$. Comme $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, il vient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) = \sqrt{\frac{n}{2e}}.$$

d. Comme

$$\sqrt{n} \underset{u\to+\infty}{\to} +\infty,$$

la série de terme général $\sqrt{n}$ diverge grossièrement. La convergence de la série de terme général $f_n(x)$ n'est donc pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

3.a. Comme $2na^2 > 1$, il est clair que

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} < a.$$

Les fonctions f_n sont donc décroissantes sur l'intervalle $[a, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

b. D'après la question 1.c, la série de terme général $f_n(a)$ est convergente. Il résulte donc de la question 3.a que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

c. Un segment quelconque $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ est inclus dans l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme la convergence est normale sur cet intervalle, elle est aussi normale sur le segment $[a, b]$, soit sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

4.a. Chacune des fonctions f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 3.c, la série de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de continuité, la fonction f est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En particulier, la fonction f possède des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons F celle qui s'annule en 1 et qui vaut donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_1^x f(y)\, dy.$$

D'après la question 3.c, la série de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur le segment $[1, x]$. Aussi le théorème d'intégration assure-t-il que

$$F(x) = \int_1^x \sum_{n=0}^{+\infty} nye^{-ny^2}\, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^x nye^{-ny^2}\, dy = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n} - e^{-nx^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{e^{x^2}-1}\right).$$

c. Par définition, la fonction f est la dérivée de sa primitive F. Ainsi vaut-elle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}.$$