Corrigé du devoir surveillé N°1

Questions de cours.

1. La série de terme général u_n peut être convergente ou divergente. Par exemple, la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, et sa série est convergente. Au contraire, la série $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ est divergente, bien que la suite $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente de limite nulle.

2. Le critère de d'Alembert s'énonce ainsi :

“ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls tels que :

- les nombres u_n sont non nuls à partir d'un certain rang,
- il existe un nombre $\lambda \in [0, +\infty]$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$.

Alors :

- si $0 \leq \lambda < 1$, la série de terme général u_n est convergente,
- si $1 < \lambda \leq +\infty$, la série de terme général u_n est divergente,
- si $\lambda = 1$, la série de terme général u_n peut être convergente ou divergente. ”

3. La série de terme général α^n est convergente si et seulement si $-1 < \alpha < 1$. Dans ce cas, la somme de cette série vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Exercice 1.

(i) Nous avons

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 e^n}.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n^2 e^n} \leq \frac{1}{n^2},$$

et que la série de Riemann de terme général $1/n^2$ est convergente, la série de terme général $1/(n^2 e^n)$ est également convergente par le principe de comparaison. La convergence absolue, et par suite, la convergence de la série de terme général u_n découlent alors de l'équivalence précédente.

(ii) Nous savons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq 1,$$

de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 1.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger vers 0, ce qui induit la divergence grossière de la série de terme général v_n.

Exercice 2.

La suite w_n est bien définie à partir du rang $n = 2$. Lorsque $\alpha > 0$, elle vérifie

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\to} -1,$$

de sorte que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

Dans le cas où $\alpha < 0$, nous savons que

$$(-1)^n n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{u\to0}{o}(u^2),$$

la suite $x_n = w_n + (-1)^n n^\alpha$ vérifie donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2\alpha}.$$

Ainsi cette suite est-elle à termes positifs lorsque n est assez grand, et par équivalence avec une série de Riemann, la série de terme général x_n est convergente si et seulement si $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Par ailleurs, la série de terme général $(-1)^n n^\alpha$ est une série alternée pour tout nombre $\alpha < 0$, et elle est donc convergente.

Lorsque $\alpha < -\frac{1}{2}$, la série de terme général w_n est la différence de deux séries convergentes, donc elle est aussi convergente. Lorsque $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, elle est la différence d'une série divergente et d'une série convergente, de sorte qu'elle est divergente.

Exercice 3.

1.a. Lorsque $0 < \alpha \leq 1$, nous vérifions que

$$\forall x \in]0, 1[, 0 < x \leq x^\alpha < 1.$$

Étant donné que $u_0 = \beta \in]0, 1[$, nous en déduisons par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq u_{n+1} < 1.$$

Il s'agit donc d'une suite croissante.

b. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 = \beta > 0.$$

En particulier, elle ne peut converger vers 0, de sorte que la série $S_{\alpha,\beta}$ est divergente.

2.a. Lorsque $\alpha > 1$, nous avons

$$\forall x \in]0, 1[, 0 < x^\alpha < x < 1.$$

Sachant que $u_0 = \beta \in]0, 1[$, il s'ensuit par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < u_n < 1.$$

Elle est donc strictement décroissante et minorée, de sorte qu'elle converge vers un nombre $0 \leq l < \beta$. De la relation

$$u_{n+1} = u_n^\alpha,$$

il découle que

$$l = l^\alpha,$$

à la limite $n \to +\infty$. L'inégalité $0 \leq l < \beta < 1$ impose alors que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\to} l = 0.$$

b. La décroissance stricte de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > l = 0.$$

Il est donc permis d'écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n^{\alpha-1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

puisque $\alpha - 1 > 0$, puis d'appliquer le critère de d'Alembert afin de conclure à la convergence de la série $S_{\alpha,\beta}$.