Université de Cergy-Pontoise | **Séries**
Licence 2 MIPI | **2015-2016**

Devoir surveillé N°3

La durée de ce devoir est de quarante-cinq minutes. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours.

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

2. Énoncer le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière.

3. Donner le développement en série entière de la fonction sinus. Sur quel intervalle, ce développement est-il valable ?

Problème.

Soit $L_0(X) = 1$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, L_p(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{n^d}{n!}.$$

a. Déterminer, si possible, la valeur de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} b_n z^n$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^{(p)} = \frac{L_p(n)}{n!}.$$

a. Établir que

$$a_n^{(p)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!\, n!}.$$

b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^{(p)} z^n$.

c. Quel est l'intervalle de convergence de la somme S_p de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^{(p)} z^n$?

d. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_p(x) = \frac{x^p}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n!} x^{n-p}.$$

e. En déduire la valeur de la somme S_p sur son intervalle de convergence.

3. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d \neq 0$, un polynôme à coefficients réels de degré $d \in \mathbb{N}$.
a. Déterminer un équivalent de la suite $\left(\frac{P(n)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.
b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$.
c. Montrer que la famille de polynômes $(L_0, \ldots, L_d)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d.
d. En déduire l'existence d'un unique $d+1$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P(X) = \sum_{p=0}^{d} \alpha_p L_p(X).$$

e. Déterminer une expression de la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$ sur son intervalle de convergence en fonction des coefficients α_0, ..., et α_d.
4. *Application.*
a. Déterminer la valeur des coefficients réels β_0, β_1 et β_2 tels que

$$X^2 - X + 1 = \beta_0 L_0(X) + \beta_1 L_1(X) + \beta_2 L_2(X).$$

b. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+1}{n!} z^n$.