Devoir surveillé N°2

La durée de ce devoir est de quarante-cinq minutes. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours.

Soit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Supposons que toutes les fonctions f_n sont croissantes sur I, et que la suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I. Que pouvez-vous dire de la monotonie de la fonction f ?

2. Donner la définition de la convergence normale de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur I.

3. Donner l'énoncé du théorème de continuité de la somme de cette série de fonctions.

Problème.

Soit

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

1.a. La série de terme général $f_n(0)$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut la somme de cette série ?

b. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Déterminer, si possible, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|.$$

c. En déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente.

d. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}.$$

Montrer que la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2.a. Montrer que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et calculer leurs dérivées.

b. Déterminer, si possible, les limites

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x).$$

c. En déduire que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sqrt{\frac{n}{2e}}.$$

d. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?

3.a. Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $2na^2 > 1$. Montrer que

$$\sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

b. En déduire que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

c. La convergence est-elle normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$?

4.a. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Calculer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$