Université de Cergy-Pontoise — **Séries**
Licence 2 MIPI — **2015-2016**

Devoir surveillé N°1

La durée de ce devoir est de quarante-cinq minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

La série de terme général u_n est-elle convergente ?

2. Énoncer le critère de d'Alembert pour la convergence d'une série de terme général u_n positif.

3. Donner l'ensemble des nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la série de terme général α^n est convergente. Quelle est la valeur de cette série lorsqu'elle est convergente ?

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries de terme général :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{1-n^2e^n}$, (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (n!)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2.

Déterminer en fonction de la valeur du nombre $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la nature de la série de terme général

$$w_n = \frac{1}{1+(-1)^n n^\alpha} - 1.$$

Exercice 3.

Soit $\alpha > 0$ et $0 < \beta < 1$. Considérons la série $S_{\alpha,\beta}$ dont le terme général est donné par la formule de récurrence

$$u_0 = \beta, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^\alpha.$$

1. Supposons que $\alpha \leq 1$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. En déduire la nature de la série $S_{\alpha,\beta}$.

2. Supposons que $\alpha > 1$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle.

b. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n^{\alpha-1},$$

et en déduire la nature de la série $S_{\alpha,\beta}$.