Université de Cergy-Pontoise **Séries**
Licence 2 MIPI **2015-2016**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. L'exercice et le problème sont indépendants.

Questions de cours.

1. Donner la définition de la convergence absolue d'une série de terme général u_n.

2. Supposons qu'une série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Cette série de fonctions est-elle simplement convergente sur l'intervalle I ?

3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R. Donner la définition de la série dérivée de cette série entière, et la valeur du rayon de convergence de cette série dérivée.

4. Donner le développement en série entière de la fonction sinus hyperbolique. Sur quel intervalle, ce développement est-il valable ?

5. Donner la définition des coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'une fonction f 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

6. Donner l'énoncé du théorème de Dirichlet pour la convergence de la série de Fourier complexe d'une fonction f 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exercice.

1. Soit
$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

a. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$?

b. En déduire que
$$\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}.$$

2.a. Montrer que la série de terme général u_n^3 est absolument convergente.

b. La série de terme général $\sin(u_n) - u_n$ est-elle convergente ?

3.a. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

b. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

c. En déduire la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.

Problème.

Soit
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+1}, \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $g_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et que sa somme est égale à

$$\forall x > 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

2. La série de terme général $f_n(0)$ est-elle convergente ?

3. Supposons que $x < 0$.

a. Quelle est la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$?

b. La série de terme général $f_n(x)$ est-elle convergente ?

4. Supposons que $x > 0$.

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leq g_n(x).$$

b. La série de terme général $f_n(x)$ est elle-convergente ?

c. Quel est le plus grand intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et calculer sa dérivée.

b. Soit $\alpha > 0$. En déduire que

$$\forall x \geq \alpha,\ |f_n'(x)| \leq g_n(\alpha).$$

c. La série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est-elle normalement convergente sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$?

d. La série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est-elle normalement convergente sur tout segment de l'intervalle I ?

e. Soit

$$\forall x \in I,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

En déduire que la fonction S est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I, et calculer sa dérivée.

6. Soit

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

a. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

b. Donner le développement en série entière de la fonction F sur l'intervalle $]-1,1[$.

c. En déduire que

$$\forall x \in I,\ S(x) = F(-e^{-x}) = -e^{x}\ln(1-e^{-x}).$$