Université de Cergy-Pontoise — **Séries**
Licence 2 MIPI — **2015-2016**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours.

1. Énoncer le critère des séries alternées pour la convergence d'une série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. Donner la définition de la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La somme S de cette série entière est-elle bien définie sur l'intervalle $]-R, R[$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R, R[$?

4. Donner le développement en série entière de la fonction cosinus. Sur quel intervalle, ce développement est-il valable ?

5. Donner la définition du coefficient de Fourier complexe $c_n(f)$ d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

6. Écrire la formule de Parseval pour les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

1. Soit
$$\forall n \geq 2,\ v_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

a. Déterminer un équivalent de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ lorsque $n \to +\infty$.

b. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ lorsque $n \to +\infty$?

2. Soit
$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

a. En déduire que
$$u_n^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e}.$$

b. Montrer que
$$e > 1.$$

c. En déduire la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2.

Soit
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^2}.$$

1.a. La série de terme général $f_n(0)$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut la somme de cette série ?

b. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Déterminer un équivalent de la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$.

c. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle simplement convergente sur $\mathbb{R}$?

2.a. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$?

3.a. Soit $R > 0$. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[-R, R]$?

b. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$?

c. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{n^4 + x^2}.$$

Quelle est la limite de la fonction $S(x)$ lorsque $x \to 0$?

Exercice 3.

Nous cherchons à résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) - 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{EqDiff}$$

1. Nous supposons qu'il existe un nombre $R > 0$ et une fonction f développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$ sous la forme

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

qui est solution de l'équation (EqDiff) sur l'intervalle $]-R, R[$.

a. Quelle est la valeur du coefficient a_0 ?

b. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_{n+1} et a_n.

c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n + 1.$$

d. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$?

e. Existe-t-il une solution f de l'équation (EqDiff) qui soit développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-R, R[$, avec $R > 0$? Si oui, quelle est la valeur de cette fonction f ?

2. Soit $y \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$, une solution de l'équation (EqDiff).

a. Soit

$$\forall x \in]-1, 1[,\ z(x) = (1-x)^2 y(x).$$

Calculer la dérivée de la fonction z sur l'intervalle $]-1, 1[$.

b. En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation (EqDiff) sur l'intervalle $]-1, 1[$, et donner sa valeur.