Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. La série de terme général u_n est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

2. La convergence normale implique la convergence simple, de sorte que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente sur l'intervalle I.

3. La série dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est la série entière

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Son rayon de convergence est égal au rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

4. La fonction sinus hyperbolique est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et son développement est donné par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

5. Les coefficients de Fourier réels d'une fonction f 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ sont définis par les formules

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \Big(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \Big),$$

et

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \Big(= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \Big),$$

si $n \geq 1$, respectivement,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \Big(= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \Big),$$

si $n \geq 1$.

6. Le théorème de Dirichlet pour la convergence de la série de Fourier complexe d'une fonction f 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'énonce ainsi :

"Si f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors, sa série de Fourier complexe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et la somme de cette série est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = f(x)."$$

Exercice.

1.a. La suite $((-1)^n)_{n\geq 1}$ est bornée, tandis que la suite $(\sqrt{n})_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Par quotient, nous en déduisons la limite

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

b. Le développement limité à l'ordre 3 de la fonction sinus en 0 est donné par la formule

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^3).$$

D'après la question 1.a, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est de limite nulle. Nous pouvons donc écrire

$$\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n^3),$$

ce qui revient à affirmer que

$$\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}.$$

2.a. Par définition, nous avons

$$\forall n \geq 1,\ |u_n^3| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n^{3/2}$ est convergente, la série de terme général $|u_n^3|$ est convergente, d'où la convergence absolue de la série de terme général u_n^3.

b. Par continuité de la valeur absolue, l'équivalent de la question 1.b conduit à la formule

$$|\sin(u_n) - u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|u_n^3|}{6}.$$

Il résulte alors du principe de comparaison et de la question 2.a que la série de terme général $\sin(u_n) - u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

3.a. La suite $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle. Aussi le critère des séries alternées garantit-il la convergence de la série de terme général u_n.

b. Par définition, nous avons

$$\forall n \geq 1,\ |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/\sqrt{n}$ est divergente, la série de terme général $|u_n|$ est divergente, ce qui induit que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

c. Nous pouvons écrire

$$\forall n \geq 1,\ \sin(u_n) = \sin(u_n) - u_n + u_n.$$

Les questions 2.b et 3.a garantissent la convergence des séries de terme général $\sin(u_n) - u_n$ et u_n. La convergence de la série de terme général $\sin(u_n)$ s'ensuit par linéarité.

Problème.

1. Rappelons que la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} u^n$ est convergente si et seulement si $|u| < 1$, et que sa somme vaut alors

$$\forall u \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}.$$

Comme
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = e^{-nx} = \left(e^{-x}\right)^n,$$
la série de fonctions de terme général $g_n(x)$ est convergente si et seulement si
$$|e^{-x}| < 1,$$
ce qui est équivalent au fait que x soit strictement positif. Cette série est donc simplement convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et sa somme est égale à
$$\forall x > 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}},$$
d'après la formule précédente pour la série géométrique.

2. Par définition, nous avons
$$f_n(0) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Comme la série de Riemann de terme général $1/n$ est divergente, il résulte du principe de comparaison que la série de terme général $f_n(0)$ est elle-aussi divergente.

3.a. Lorsque $x < 0$, le nombre e^{-x} est strictement supérieur à 1. Nous savons alors que
$$f_n(x) = \frac{(e^{-x})^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$
b. D'après la question 3.a, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle. La série de terme général $f_n(x)$ est donc divergente.

4.a. Il est clair que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n + 1 \geq 1.$$
La positivité des nombres $g_n(x)$ suffit alors à affirmer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \frac{g_n(x)}{n+1} \leq g_n(x).$$
b. Il résulte de la question 1 que la série de terme général $g_n(x)$ est convergente. Par le principe de comparaison, la question 4.a permet d'établir que la série de terme général $f_n(x)$ est elle-aussi convergente.

c. Les questions 2, 3.b et 4.b montrent que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$. Le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente est donc égal à
$$I =]0, +\infty[.$$
5.a. Il résulte des opérations élémentaires sur les fonctions que la fonction f_n est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que sa dérivée est égale à
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f_n'(x) = -\frac{n}{n+1}\, e^{-nx}.$$
b. Nous avons donc
$$\forall x \geq \alpha,\ |f_n'(x)| = \frac{n}{n+1}\, e^{-nx} \leq e^{-nx} = g_n(x).$$

La fonction g_n est de plus décroissante sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Aussi avons-nous

$$\forall x \geq \alpha,\ g_n(x) \leq g_n(\alpha),$$

puis

$$\forall x \geq \alpha,\ |f_n'(x)| \leq g_n(\alpha).$$

c. D'après la question 1, la série de terme général $g_n(\alpha)$ est convergente. Il découle alors de la question 5.b que la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

d. Si $J = [\alpha, \beta]$ est un segment de l'intervalle $]0, +\infty[$, alors J est inclus dans l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Comme la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ par la question 5.c, elle l'est également sur le segment J, et par suite sur tout segment de l'intervalle I.

e. Il découle du théorème de dérivabilité des séries de fonctions et des questions 4.c, 5.a et 5.d qui en vérifient les hypothèses, que la somme S de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, sa dérivée est égale à

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\, e^{-nx}.$$

6.a. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$, et son développement est donné par la formule

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

b. Diviser par x suffit pour établir que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}.$$

c. Puisque

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ -1 < e^{-x} < 1,$$

nous déduisons de la question 6.b que

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-e^{-x})^n}{n+1} = F(-e^{-x}),$$

ce qui permet de conclure que

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ S(x) = -e^x \ln(1 - e^{-x}).$$