**Université de Cergy-Pontoise** **Séries**
**Licence 2 MIPI** **2015-2016**

# Corrigé de l'examen

**Questions de cours.**

1. Le critère des séries alternées s'énonce ainsi :

"Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls, décroissante et de limite nulle, alors, la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente."

2. Une suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une fonction $f$ définie sur $I$ telle que :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

3. La somme $S$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

4. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et son développement est donné par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}.$$

5. Le coefficient de Fourier complexe $c_n(f)$ d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est défini par l'expression :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \left( = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \right).$$

6. La formule de Parseval pour les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ s'écrit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \left( = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right).$$

**Exercice 1.**

1.a. Rappelons que

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u.$$

Comme

$$-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

il vient

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Multiplier par $n$ conduit à l'équivalent

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

b. La définition de la notion d'équivalent permet d'établir que

$$\frac{v_n}{-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

de sorte que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est convergente de limite égale à $-1$.

2.a. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et strictement positive pour $n \geq 2$. Elle est de plus donnée par la formule

$$\forall n \geq 2,\ u_n^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{v_n}.$$

La continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et la limite obtenue à la question 1.b. conduisent alors à la convergence

$$u_n^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

b. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui induit que

$$e = e^1 > e^0 = 1.$$

c. La limite $e^{-1}$ de la question 2.a est donc strictement inférieure à 1. Par le critère de Cauchy, la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

**Exercice 2.**

1.a. Nous constatons que

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(0) = 0.$$

La série de terme général $f_n(0)$ est donc convergente, et sa somme est égale à 0.

b. Nous pouvons vérifier que

$$n^4 + x^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4.$$

La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ a donc pour équivalent

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^3}.$$

c. Comme $3 > 1$, la série de Riemann de terme général $n^{-3}$ est convergente. Par linéarité, la série de terme général $xn^{-3}$ est aussi convergente. L'équivalent de la question 1.b permet de conclure que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout nombre réel $x \neq 0$. D'après la question 1.a, cette série de fonctions est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

2.a. Soit $n \geq 1$. La fonction $f_n$ est bien définie, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est égale à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \frac{n(n^4 - x^2)}{(n^4 + x^2)^2}.$$

La fonction $f_n$ est donc croissante sur le segment $[0, n^2]$ et décroissante sur l'intervalle $[n^2, +\infty[$. Elle est nulle en 0, et a pour limite en $+\infty$,

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

La fonction $|f_n|$ admet donc un maximum en $\pm n^2$, lequel est égal à

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

b. La série de Riemann de terme général $1/n$ est divergente. Par linéarité, la série de terme général $\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ est également divergente. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

3.a. Lorsque $n \geq \sqrt{R}$, l'étude de la fonction $f_n$ réalisée à la question 2.a établit que cette fonction est croissante sur le segment $[0, R]$. Comme cette fonction est nulle en 0 et impaire, ceci assure que la fonction $|f_n|$ atteint son maximum sur le segment $[-R, R]$ en $\pm R$, et ce maximum vaut

$$\max_{x\in[-R,R]} |f_n(x)| = f_n(R) = \frac{nR}{n^4 + R^2}.$$

D'après la question 1.c, la série de terme général $f_n(R)$ est convergente. La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est donc normalement convergente sur le segment $[-R, R]$.

b. Soit $[a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$. Nous savons qu'il existe un nombre strictement positif $R$ tel que

$$[a, b] \subset [-R, R].$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq \max_{x\in[-R,R]} |f_n(x)|.$$

Comme la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur le segment $[-R, R]$, elle l'est également sur le segment $[a, b]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

c. Les fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Comme la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$, sa somme $S$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1.a, il s'ensuit que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\to} S(0) = 0.$$

**Exercice 3.**

1.a. Le coefficient $a_0$ est égal à

$$a_0 = f(0) = 1.$$

b. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in ]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Le changement d'indice $m = n - 1$ conduit à la formule

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m + 1)a_{m+1} x^m.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\forall x \in ]-R, R[,\ 0 = (1 - x)f'(x) - 2f(x) = a_1 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n + 1)a_{n+1} - (n + 2)a_n\Big)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, il s'ensuit que

$$a_1 = 2a_0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a_{n+1} = \frac{n + 2}{n + 1} a_n.$$

c. La preuve se fait par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, nous avons bien

$$a_0 = 1, \quad \text{et} \quad a_1 = 2.$$

Supposons que la formule soit vraie jusqu'au rang $n$. Au rang $n+1$, il découle de la question 1.b que

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n = \frac{n+2}{n+1}(n+1) = n+2.$$

Par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, nous concluons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, a_n = n+1.$$

d. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs, et elle satisfait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 1.$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$ est donc égal à 1.

e. La somme $f$ de cette série entière est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Les calculs précédents sont justifiés sur cet intervalle. La fonction $f$ est une solution de l'équation (EqDiff) sur l'intervalle $]-1, 1[$, qui est développable en série entière sur cet intervalle. De plus, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$ est la série dérivée de la série géométrique, ce qui permet de conclure que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \, f(x) = \Big( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Big)' = \Big( \frac{1}{1-x} \Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2.a. La fonction $z$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. De plus, sa dérivée est égale à

$$\forall x \in ]-1, 1[, \, z'(x) = (1-x)\Big((1-x)y'(x) - 2y(x)\Big) = 0.$$

b. La fonction $z$ est donc constante sur l'intervalle $]-1, 1[$, de sorte qu'elle vaut

$$\forall x \in ]-1, 1[, \, z(x) = z(0) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \, y(x) = f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Aussi l'équation (EqDiff) admet-elle une unique solution $f$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, qui est donnée par la formule

$$\forall x \in ]-1, 1[, \, f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$