Emmanuel Hebey
Année 2024-2025

Intégration
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme réel donné par

$$P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X + 2 \ .$$

(1) (1 pt) Calculer $P(-1)$ puis factoriser P en facteurs irréductibles.

(2) (4 pts) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 10x + 7}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx \ .$$

Vous justifierez les différentes étapes de vos calculs et raisonnements.

Exercice 2: Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ deux réels positifs donnés. On suppose que $b > 1$. On note $I_{a,b}$ l'intégrale généralisée

$$I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{ax^b + 2x + 5}{x^{b-2}(5x^2 + 3)} dx$$

et $f_{a,b}$ la fonction qui est intégrée dans $I_{a,b}$.

(1) (1 pt) On suppose $a \neq 0$. Montrer que $I_{a,b}$ est divergente en $+\infty$ pour tout $b > 1$.

(2) (2 pts) On suppose maintenant que $a = 0$. Pour quelles valeurs de b l'intégrale $I_{0,b}$ est-elle convergente en 0 ? Et en $+\infty$? Au total, pour quelles valeurs de b l'intégrale $I_{0,b}$ est-elle convergente ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$.

(1) (2 pts) Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

(2) (3 pts) On note

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{xf(nx)}{(1 + x^2)^2} dx \ .$$

Montrer que I_n a une limite lorsque $n \to +\infty$ et calculer cette limite.

Exercice 4: On note $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t)}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t)(1+t^2)^2} dt \ .$$

(1) (1 pt) Montrer que $0 \leq \ln(X) \leq X - 1$ pour tout $X \geq 1$.

(2) (2 pts) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$.

(3) (2 pts) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $F'(x)$ en fonction de G pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) (1 pt) Calculer la limite de $\frac{F'(x)}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 5: (3 pts) Calculer $I = \int\int_D xydxdy$, où

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0, x - 4y + 2 \geq 0, x - 2y - 2 \leq 0\right\} \ .$$