Emmanuel Hebey
Année 2023-2024

Intégration
Examen - Session 1
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents et les calculatrices sont interdits)

Exercice 1: (3 pts) Soit $\alpha \geq 1$ un réel. Etudier, en fonction de $\alpha \geq 1$, la convergence de l'intégrale généralisée

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x^7 + 5x^3 + 3x + 1}{\sqrt{x}(3x^\alpha + 4x + 1)} dx \ .$$

Justifier vos réponses et préciser en quelle(s) borne(s) I_α est généralisée.

Exercice 2: **(1)** (4 pts) Pour $A > 0$, calculer

$$I_A = \int_0^{A} \frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^2(x^2+1)} dx \ .$$

En déduire la valeur de la limite $\lim_{A \to +\infty} \big(I_A - \ln(1 + A) \big)$.

(2) (3 pts) Calculer, en justifiant, la limite

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2 x^4 + 3x^2 + 7}{(n^2 x^4 + 3)(x^2 + 1)} dx \ .$$

Exercice 3: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2 + 1 \big\} \ .$$

(1) (2 pts) Calculer l'aire de D.

(2) (2 pts) Calculer l'intégrale double $I = \iint_D xydxdy$.

(3) (2 pts) Soit $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 1, y \geq 1, y^2 \leq 1 + x\}$. Calculer l'aire de $\tilde{D}$.

Exercice 4: Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2} dt \ .$$

(1) (2 pts) Montrer que Φ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

(2) (2 pts) Montrer que Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer $\Phi'(x)$.

(3) (1 pt) En utilisant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$, relier $\int_0^A e^{-xt^2} dt$ et $\int_0^{A\sqrt{x}} e^{-u^2} du$. En déduire une relation entre $\Phi'(x)$, $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ et l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ pour tout $x > 0$.

(4) (1 pt) En utilisant le changement de variables $x = t^2$ établir une relation entre $\int_0^A \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_0^{\sqrt{A}} e^{-t^2} dt$ pour tout $A > 0$.

(5) (1 pt) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$ et calculer $\Phi(0)$.

(6) (1 pt) En intégrant la relation trouvée à la question 3 entre 0 et $A > 0$, puis en faisant tendre $A \to +\infty$, calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.