Emmanuel Hebey
Année 2022-2023

Intégration
Examen - Session 1
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents et les calculatrices sont interdits)

Exercice 1: **(1)** (3 pts) Soit $\alpha \geq 0$ un réel. Etudier, en fonction de α, la convergence de l'intégrale généralisée

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{5x^3+3x+1}{\sqrt{x}(2x^\alpha+3x+1)}dx \ .$$

Justifier vos réponses et préciser en quelle(s) borne(s) I_α est généralisée.

(2) (2 pts) Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x+1}{2x^3+x+1} + \frac{(x^2+1)\sin(x)}{x^3+2} + \frac{\ln(x)}{x}\cos(x) \ .$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ?

Exercice 2: **(1)** (3 pts) Pour $A > 0$, calculer $I_A = \int_0^A \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

(2) (3 pts) Calculer, en justifiant, la limite $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^2x^2+3x+1}{n^2x^2(x^2+1)}dx$.

Exercice 3: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ donné par $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2+1\right\}$.

(1) (1 pt) Calculer l'aire de D.

(2) (2 pts) Calculer l'intégrale double $I = \iint_D xydxdy$.

(3) (2 pts) Soit $\tilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 2, y \geq 0, y^2 \leq x\right\}$. Calculer l'aire de $\tilde{D}$.

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et Φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$\Phi_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)^n}dt \ .$$

(1) (2 pts) Montrer que Φ_n est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(2) (1 pt) Calculer $\Phi_1(x)$ pour $x > 0$ en effectuant le changement de variables $\theta = \frac{t}{x}$.

(3) (2 pts) Montrer que Φ_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour tout n et exhiber une relation entre $\Phi_n'(x)$ et $\Phi_{n+1}(x)$.

(4) (2 pts) Montrer, par récurence sur n, qu'il existe une suite (k_n) de réels pour laquelle $\Phi_n(x) = \frac{k_n}{x^{2n-1}}$ pour tout n et tout $x > 0$. Quelle relation de récurrence définit les k_n ?