Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

Intégration
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: (4 pts) Calculer, en justifiant vos calculs, l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{2x^4 + x^3 - x + 1}{(x^2 + 2x + 1)(x + 2)} dx \ .$$

Exercice 2: (3 pts) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{x}(5x^2 + 3)} dx \ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelle(s) borne(s) cette intégrale est généralisée.

Exercice 3: (3 pts) Calculer, en justifiant, la limite

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2 x + 1}{n^2 x(x^2 + 1) + 1} dx \ .$$

Exercice 4: (3 pts) Calculer $I = \int\int_D xydxdy$, où

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0, x - 2y + 1 \geq 0, x - y - 1 \leq 0\right\} \ .$$

Exercice 5: **(1)**(2 pts) Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ est convergente.

On note maintenant F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x \ln t}}{1+t} dt \ .$$

(2) (1 pt) Montrer que pour $x, x' \in \mathbb{R}^{+\star}$, $x \leq x' \Rightarrow F(x) \geq F(x') \geq 0$.

(3) (2 pts) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

(4) (1 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1)$.

(5) (2 pts) En déduire les limites de F en 0 (comprendre en 0^+) et en $+\infty$. On justifiera l'existence de ces limites.