Licence MIPI
Juin 2021
Durée 2 heures

Examen fonctions de plusieurs variables, session 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits.
Barème indicatif : 4+5+7+4

Exercice 1 : Question de cours

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $M = (1, 0)$.

1. Rappeler la définition des deux dérivées partielles de φ en M.
2. Rappeler la définition de : φ possède un maximum global en M.
3. Rappeler la définition de : M est un point critique de φ.
4. Démontrer que si φ possède un maximum global en M alors M est un point critique de φ.

Exercice 2 : Fonction $\mathcal{C}^1$

Soit φ définie par $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^4 + x_2^4}$

1. Calculer les dérivées partielles de φ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer les dérivées partielles de φ en $(0, 0)$.
3. Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{x_1^4 + x_2^4} \geq x_1^2$, en déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. La fonction φ est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 3 : Extrema

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(0;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0;1) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0;1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0;1) = 3 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0;1) = 2$$

1. Écrire un DL_2 de φ en (0 ;1).
2. Écrire la Hessienne de φ en (0 ;1), déterminer sa signature.
3. φ possède-t-elle un extremum local en (0 ;1) ?
4. On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi(t, e^t)$, calculer $f'(t)$, puis $f''(t)$, en fonction des dérivées partielles de φ.
5. Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$, montrer que f possède un extremum local en 0.

Exercice 4 : Dérivée partielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, admettant pour primitive la fonction F, et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = \int_x^{y^2} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\varphi(4, 2) = 0$.
2. Calculer les dérivées partielles de φ, en fonction de f et f'.
3. Montrer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que $(1; 0)$ est un point critique de φ si et seulement si $f'(1) = 0$.