Fonctions de plusieurs variables : Mai 2021

Exercice 1 : $\varphi(h_1, 1+h_2) = \varphi(0,1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0,1)\, h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0,1)\, h_2 + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0,1) h_1^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0,1)\, h_1 h_2 + \dots$

$\dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0,1)\, h_2^2\Big] + (h_1^2 + h_2^2)\, \mathcal{E}(h_1,h_2)$ avec $\lim_{(0,0)} \mathcal{E} = 0$.

1.2 : $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \exists \theta \in [a,b]\quad f(b) - f(a) = f'(\theta)(b-a)$

1.3 : $h'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t,1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t,0)$

1.4 : Appliquons le T.A.F. à h, il existe $\theta_1 \in [0,1]$

$A = \varphi(1,1) - \varphi(1,0) - \varphi(0,1) + \varphi(0,0) = h(1) - h(0) = h'(\theta_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\theta_1, 1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\theta_1, 0)$

posons $k(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\theta_1, t)$ alors $A = k(1) - k(0)$ et k est de classe $\mathcal{C}^1$ appliquons lui le T.A.F. il existe $\theta_2 \in [0,1]$ tq $k_1(1) - k(0) = k'(\theta_2)$

$k(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\theta_1, t)$ on a donc $k'(t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}(\theta_1, t)$ finalement $A = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\theta_1, \theta_2)$.

Exercice 2 :

2.1 : $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$ $\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$

2.2 : $h_1(t) = \varphi(t,0) = t \ln(t^2)$ si $t \neq 0$ et $h_1(0) = 0$. $\quad \frac{h_1(t) - h_1(0)}{t} = \ln(t^2) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$

h_1 n'est pas dérivable en $(0,0)$ donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0,0)$ n'existe pas.

$h_2(t) = \varphi(0,t) = 0 \ln(t^2) = 0$ qui est dérivable $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0,0) = 0$.

2.3 : $|\varphi(x_1,x_2)| = |x_1|\,|\ln(x_1^2+x_2^2)| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,|\ln(x_1^2+x_2^2)|$

or $t \ln t^2 = 2t \ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ Donc $\lim_{(0,0)} \varphi = 0$

φ est continue en $(0,0)$.

Exercice 3 : $\varphi(1,3) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1,3) = 2$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1,3) = 1 \qquad \varphi$ est $\mathcal{C}^1$

3.1 : Si φ possédait un extremum en $(1,3)$, $(1,3)$ serait un point critique de φ on aurait donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,3) = 0$ ce n'est pas le cas, φ n'a pas d'extremum en $(1,3)$.

3.2 : $\varphi(1+h_1 ; 3+h_2) = \varphi(1,3) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1,3)\, h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1,3)\, h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\, \mathcal{E}(h_1,h_2)$ avec $\lim_{0} \mathcal{E} = 0$

$= 2h_1 + h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\, \mathcal{E}(h_1,h_2)$.

3.3 : $\varphi(1+2t^2 ; 3-t^2) = 4t^2 - t^2 + \sqrt{4t^4+t^4}\, \mathcal{E}(2t^2 ; -t^2) = 3t^2 + t^2\sqrt{5}\, \mathcal{E}(2t^2 ; -t^2)$

$= \underbrace{t^2}_{\geq 0}\underbrace{\left(3 + \sqrt{5}\, \mathcal{E}_1(t)\right)}_{\text{positif pour } t \text{ assez petit}}$ $\qquad$ avec $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}(2t^2 ; -t^2)$, $\lim_0 \mathcal{E}_1 = 0$.

3.4 : $f'(t) = -2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(5-2t ; t^2-1) + 2t\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(5-2t ; t^2-1) \qquad f'(2) = -2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1;3) + 4\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1;3) = 0$

$f'(2) = 0$. On ne peut pas en déduire que f possède un extremum en 2.

Exercice 4 : φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

4.1 : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = y - 16x\, e^{-x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x - 16y\, e^{-x^2-y^2}$

4.2 : (x,y) est un point critique de φ ssi $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} y - 16x\, e^{-x^2-y^2} = 0 \\ x - 16y\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 16x\, e^{-x^2-y^2} = 0 \\ x - y + 16(x-y) e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 16x\, e^{-x^2-y^2} = 0 \\ (x-y)\underbrace{\left[1 + 16 e^{-x^2-y^2}\right]}_{>0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ x - 16x\, e^{-2x^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x(1 - 16 e^{-2x^2}) = 0. \end{cases}$$

or $1 - 16 e^{-2x^2} = 0 \iff e^{-2x^2} = \frac{1}{16} \iff -2x^2 = -\ln 16 \iff x = \pm\sqrt{\ln 4}$

On obtient bien 3 points critique $(0;0)$; $(\sqrt{\ln 4}\,;\sqrt{\ln 4})$; $(-\sqrt{\ln 4}\,;-\sqrt{\ln 4})$.

4.3 : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (-16 + 32x^2)\, e^{-x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 1 + 32xy\, e^{-x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (-16 + 32y^2)\, e^{-x^2-y^2}$

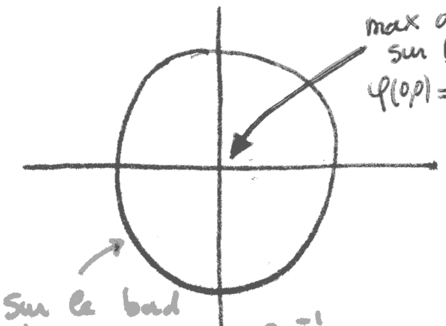
4.4 : $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}$

4.5 : $(X\ Y)\, H \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -16X^2 + 2XY - 16Y^2 = -\left(4X - \frac{1}{4}Y\right)^2 + \frac{1}{16}Y^2 - 16Y^2$

$$= -\left(4X - \tfrac{1}{4}Y\right)^2 - \frac{16^2-1}{16} Y^2$$

Donc H a pour signature $(0;2)$ elle est définie négative, φ possède en $(0,0)$ un maximum local strict.

4.6 : B est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ c'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$ comme φ est continue sur B elle possède un maxim global et un minimum global sur B.



4.7 : Si φ possède un maximum à l'interieur de B c'est en $(0,0)$ et $\varphi(0,0) = 8$

Si (x,y) appartient au bord de B alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

donc $\varphi(x,y) \leq 1 + 8e^{-1} < 8 = \varphi(0,0)$

Donc le maximum de φ sur B est en $(0,0)$

$\forall (x,y) \in B \quad \varphi(x,y) \leq \varphi(0,0) = 8$.

Exercice 5 : $N_1(0) = 0 = N_2(0)$ Soit $X \in \mathbb{R}^p$ $X \neq 0$.

5.1 $\frac{X}{N_1(X)} \in C_1$ donc $\frac{X}{N_1(X)} \in C_2$ donc $N_2\left(\frac{X}{N_1(X)}\right) = 1$ or $N_2\left(\frac{X}{N_1(X)}\right) = \frac{1}{N_1(X)} N_2(X)$ donc $N_1(X) = N_2(X)$

5.2 $t\frac{X}{N_1(X)} \in B_1$ pour tout réel $t < 1$ donc $t\frac{X}{N_1(X)} \in B_2$ donc $N_2\left(\frac{tX}{N_1(X)}\right) < 1$

donc pour tout reel $t \in]0,1[$ $\frac{t}{N_1(X)} N_2(X) < 1$ donc $tN_2(X) < N_1(X)$ $\forall t \in]0,1[$

en faisant tendre t vers 1 on obtient $N_2(X) \leq N_1(X)$

de même en inversant les rôles de N_1 et N_2 on obtient $N_2(X) \leq N_1(X)$