Licence MIPI
Mai 2021
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques : Fonctions de plusieurs variables

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits.
Barème indicatif sur 30 : 7+4+5+9+5

Exercice 1 : Question de cours

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Rappeler la formule du développement limité à l'ordre 2 de φ en $(0, 1)$.
2. Rappeler pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ le théorème des accroissements finis.
3. On pose $h(t) = \varphi(t; 1) - \varphi(t; 0)$, calculer $h'(t)$ en fonction des dérivées partielles de φ.
4. (*) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in [0; 1]$ telles que

$$\varphi(1; 1) - \varphi(1; 0) - \varphi(0; 1) + \varphi(0; 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2}(\theta_1; \theta_2)$$

Exercice 2 : Continuité et dérivées partielles

Soit φ la fonction définie par $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\},\ \varphi(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_1^2 + x_2^2)$ et $\varphi(0; 0) = 0$.

1. Calculer les dérivées partielles de φ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. φ possède-t-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$ et si oui les calculer.
3. Montrer que φ est continue en (0 ;0).

Exercice 3 : DL$_1$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\varphi(1; 3) = 0$; $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1; 3) = 2$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1; 3) = 1$

1. φ possède-t-elle un extremum local en $(1; 3)$?
2. Ecrire un DL$_1$ de φ en (1 ;3).
3. Montrer que pour t assez petit $\varphi(1 + 2t^2, 3 - t^2)$ est positif.
4. On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi(5 - 2t, t^2 - 1)$, calculer $f'(t)$. Peut-on en déduire que f possède un extremum en 2 ?

Exercice 4 : Extrema

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = xy + 8e^{-x^2-y^2}$

1. Calculer les dérivées partielles de φ.
2. Montrer que φ possède 3 points critiques dont $(0, 0)$ et $(\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4})$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de φ.
4. Montrer que la hessienne de φ en $(0; 0)$ est $H = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}$.
5. Étudier le signe de H, que peut-on en déduire pour un éventuel extremum de φ en $(0, 0)$?
6. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, montrer que la restriction de φ à B possède un maximum global et un minimum global.
7. Déterminer le maximum global de φ sur B.

Exercice 5 : Différentes normes sur $\mathbb{R}^p$

Soit N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^p$, $B_1 = \{X \in \mathbb{R}^p / N_1(X) < 1\}$, $B_2 = \{X \in \mathbb{R}^p / N_2(X) < 1\}$, $C_1 = \{X \in \mathbb{R}^p / N_1(X) = 1\}$, et $C_2 = \{X \in \mathbb{R}^p / N_2(X) = 1\}$.

1. Montrer que si $C_1 = C_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.