Université de Cergy-Pontoise 2018/2019
L2-MIPI

Examen de Fonctions de plusieurs variables

(Vendredi 10 Mai 2019 – durée 3 heures)

– Les documents, téléphones mobiles et objets connectés sont strictement interdits –

Questions de cours.

1. Rappeler les définitions suivantes :
   a) ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ b) ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ c) ensemble compact de $\mathbb{R}^n$
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose
$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$
   Montrer que
$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application
$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4+\alpha y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$est continue sur $\mathbb{R}^2$ pour toute valeur de α.
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x, y) = (x + y)^3 + 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en chacun de ces points.
3. En déduire en justifiant vos réponses, lesquels parmi ces points sont des extrema locaux de f ?
4. Est-ce que f possède un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?
5. On considère maintenant la fonction f définie uniquement sur l'ensemble $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$.
   i) Représenter graphiquement l'ensemble A et justifier que f admet un minimum global et un maximum global sur A.
   ii) Déterminer ce minimum global et ce maximum global de f sur A (on pourra étudier rapidement les fonctions $g(t) = f(-1, t) = f(t, -1)$ et $h(t) = f(t, 1) = f(1, t)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$).

Exercice 3. On définit deux applications :

- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + y, xy)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x, y).
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on notera $\big(D(f \circ g)\big)_{(x,y)}$ la différentielle de $f \circ g$ au point (x, y). Déterminer l'image d'un vecteur $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $\big(D(f \circ g)\big)_{(x,y)}$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   a) en calculant $f \circ g$.
   b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.