Université de Cergy-Pontoise 2016/2017

L2 - MIPI

Examen de "Fonctions de plusieurs variables"

– Vendredi 12 Mai 2017 – durée 3 heures – Documents, calculatrices, téléphones interdits –

Exercice 1.

1. Calculer les limites suivantes si elles existent :
$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+xy+2y^2}, \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \ln\left(\frac{1+x+2y}{3y^2-x}\right).$$
2. Soient f et g deux fonctions telles que
$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(8x^3+y,2x) \text{ et } g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=(2u-v^3,3v).$$
Calculer la matrice jacobienne de f en (x,y), celle de de g en (u,v) puis déduire la matrice jacobienne de $g\circ f$ en (x,y).
3. Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note
$$A+B=\{a+b \text{ où } a\in A, b\in B\}.$$
Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la reponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en (0, 0) ? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivees partielles de f en un point $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.
5. Soit $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y)=(f(x,y),f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)=4,\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=-1,\ f(2,3)=7.$$

1. Est-ce que $(2,3)$ est un maximum ou minimum local de f, ou ni l'un ni l'autre ? Justifier.
2. Pour $h>0$ suffisamment petit, $f(2+h,3-h)$ est-il plus grand ou plus petit que 7 ? Justifier.
3. On définit une fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $g(t)=f(2t^2,t^3+2)$. Trouver la valeur de la dérivée de g au point $t=1$.

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+(5+x)(1+y^2).$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f.
3. Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 de f en chacun des points critiques.
4. Parmi les points critiques trouvés en 1), lesquels sont des extrema locaux de f ?
5. Est-ce que f possède un maximum global ou un minimum global ?