Université de Cergy-Pontoise 2015/2016
L2 - MIPI

Examen de "Fonctions de plusieurs variables"
(Vendredi 13 Mai 2016 – durée 3 heures)
– Les documents, calculatrices, téléphones mobiles sont strictement interdits –

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

1. Rappeler la définition d'un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$ à l'aide des suites.
2. Rappeler la caractérisation de la continuité à l'aide des suites.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $f(K) \subset \mathbb{R}^d$ par
$$f(K) = \{y \in \mathbb{R}^d | \exists x \in K \text{ tel que } y = f(x)\}.$$
Montrer que si K est un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$ alors $f(K)$ est un ensemble compact dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Etude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout m.
   b) A t-on f différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout m ?

2) Etude de la fonction en $(0,0)$:
   a) Pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
   b) Pour quelles valeurs de m la fonction f admet-elle des dérivées parteielles en $(0,0)$? Donner dans ce cas leurs valeurs.
   c) Pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   d) Pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + (1+x)y^2$$

a) Déterminer les points critiques de f.
b) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
c) Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 de f en chacun des points critiques.
d) Parmi les points critiques trouvés en a), lesquels sont des extrema locaux de f ?
e) Est-ce que f possède un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et
$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. a) Donner l'expression de la fonction $h = f \circ g$ en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   b) Justifier pourquoi cette fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
   c) Qu'appelle t-on alors "différentielle de h en un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$" notée $(Dh)_a$?
2. Calculer la différentielle de $h = f \circ g$ en un point $a = (a_1, a_2)$,

3. Calculer les matrices Jacobiennes de f et de g en (x, y).
4. En déduire la matrice jacobienne de $f \circ g$ en appliquant le théorème de la composée de deux fonctions différentiables. Retrouver le résultat du 2).

Exercice 5.
1) Calculer lorsque cela est possible $g'(t)$ dans chacun des cas suivants en utilisant les dérivées partielles de f et les dérivées des fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$:

a) $g(t) = f\Big(x(t), y(t)\Big)$ où $f(x, y) = \cos(x + 4y),\ x(t) = 5t^4,\ y(t) = \frac{1}{t}$.

b) $g(t) = f\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$ où $f(x, y) = xe^{\frac{y}{z}},\ x(t) = t^2,\ y(t) = 1 - t,\ z(t) = 1 + 2t$.

2) Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2, 5) = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 5) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 5) = -1,$$

donner une valeur approchée de $f(2.2; 4.9)$ en justifiant votre méthode.