Université de Cergy-Pontoise 2015/2016

L2 - MIPI

Examen Session 2 de "Fonctions de plusieurs variables"

(Mercredi 8 juin 2016 – durée 2 heures)

– Les documents, calculatrices, téléphones mobiles sont strictement interdits –

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

1) Etude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$:

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.

b) A t-on f différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$?

2) Etude de la fonction en $(1,0)$:

a) Montrer que la fonction f est continue en $(1,0)$.

b) Calculer les dérivées partielles de f en $(1,0)$?

c) Montrer que la fonction f n'est pas différentiable en $(1,0)$?

d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$$

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

c) Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 de f en chacun des points critiques.

d) A l'aide de la formule de Taylor trouvée en c), étudier la nature de chacun des points critiques de f ?

e) Est-ce que f possède un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1) Calculer les matrices Jacobiennes de f et de g en (x,y).

2) En déduire la matrice jacobienne de $f \circ g$ en appliquant le théorème de la composée de deux fonctions différentiables.