L2 licence de mathématiques
Juin 2021
Durée 2 heures

Examen de compléments d'analyse, session 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. La rédaction doit mettre en valeur une grande rigueur mathématiques. Barème indicatif : 6+3+8+3

Exercice 1 :

1. Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[-3;3]$, montrer à l'aide de la définition de la borne supérieure que
$$\sup\{u_n+v_n \in \mathbb{R}/n\in\mathbb{N}\} \leq \sup\{u_n \in \mathbb{R}/n\in\mathbb{N}\} + \sup\{v_n \in \mathbb{R}/n\in\mathbb{N}\}$$
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[-3;3]$, on pose $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = u_n+v_n$.
   (a) Rappeler la définition de la limite supérieure d'un suite d'éléments de $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer à l'aide de la définition de la limite supérieure que : $\overline{\lim}(w_n) \leq \overline{\lim}(u_n) + \overline{\lim}(v_n)$
   (c) Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de $[-3;3]$ telles que
$$\overline{\lim}(u_n+v_n) < \overline{\lim}(u_n) + \overline{\lim}(v_n)$$

Exercice 2 :

Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout n $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = a_n$ et $\lim a_n = +\infty$

1. Rappeler la définition de la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Donner un exemple de suite de fonctions telle que pour tout n $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = a_n$ et $\lim a_n = +\infty$ et (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = -(x-(n+1))(x-n) & \text{si } x\in[n;n+1] \\ f_n(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la fonction f_0 puis représenter f_0.
2. Étudier la fonction f_n puis représenter f_n.
3. Représenter rapidement le graphe de la fonction $S_1 = \sum_{k=0}^{1} f_k$ puis de la fonction $S_N = \sum_{k=0}^{N} f_k$.
4. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$
5. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$
6. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(\frac{1}{n+1}f_n)$ sur $\mathbb{R}$
7. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $(\sum \frac{1}{n+1}f_n)$ sur $\mathbb{R}$
8. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $(\sum \frac{1}{n+1}f_n)$ sur $\mathbb{R}$
9. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $(\sum \frac{1}{n+1}f_n)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Expliquer une méthode permettant d'approcher $f(1)$ où f est la solution du problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} f'(x) - e^x f(x) = \sqrt{1+x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$