Examen Complement d'analyse 2021

Exercice 1 :

1.1. Ω est un ouvert si $\forall x \in \Omega\ \exists \varepsilon > 0\ \ ]x-\varepsilon ; x+\varepsilon[\subset \Omega$

F est un fermé de $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

1.2 : $[0,1[$ n'est pas ouvert car aucun intervalle de la forme $]-\varepsilon ; +\varepsilon[$ n'est inclus dans $[0,1[$ avec $\varepsilon > 0$ par exemple $-\frac{\varepsilon}{2} \in]-\varepsilon ; \varepsilon[\setminus [0;1[$.

le complémentaire de $[0,1[\, = \,]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[\, = A$

aucun intervalle de la forme $]1-\varepsilon ; 1+\varepsilon[$ n'est inclus dans A.

1.3 : Si $\ell \in \mathbb{R}\setminus F$ comme $\mathbb{R}\setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ il existe $\varepsilon > 0$ tq $]\ell-\varepsilon ; \ell+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus F$ or $u_n \in F$ donc $u_n \notin]\ell-\varepsilon ; \ell+\varepsilon[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \ell| \geq \varepsilon$ ce qui est absurde (cela contredit $\lim u_n = \ell$).

b) Si F n'est pas fermé, $\mathbb{R}\setminus F$ n'est pas ouvert, il existe $a \in \mathbb{R}\setminus F$ tq $\forall \varepsilon > 0\ ]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[\not\subset \mathbb{R}\setminus F$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ ]a-\frac{1}{n} ; a+\frac{1}{n}[\cap F \neq \emptyset$

Soit $x_n \in]a-\frac{1}{n} ; a+\frac{1}{n}[\cap F$ $\quad |x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim x_n = a$ et $x_n \in F$ pour $\forall n$.

Si F n'est pas fermé il existe une suite d'éléments de F qui converge vers un élément de $\mathbb{R}\setminus F$

(c) on a montré $\Longrightarrow$ dans le a et $\Longleftarrow$ dans le b. d'où l'équivalence.

Exercice 2 :

$A = \{-\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\} \cup]5,6[\cup]6;+\infty[\, = \{-1 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3} ; \dots -\frac{1}{n} \dots\} \cup]5;6[\cup]6;+\infty[$

$\bar{A} = A \cup \{0\} \cup [5;+\infty[\qquad \mathring{A} =]5;6[\cup]6;+\infty[\qquad A' = \{0\} \cup [5;+\infty[$

$\overline{A'} = A' \qquad \bar{A}' = A' \qquad \mathring{\bar{A}} =]5;+\infty[\qquad \bar{\mathring{A}} =]5;+\infty[\qquad A'' = [5;+\infty[$

Exercice 3 :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$ 2 Valeurs propres 1 et 2

$M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M-2I). \qquad M - I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M - I$

D'après un résultat du cours on a donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Posons $U = P^{-1}X \qquad X' = MX \Longleftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Longleftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$

Posons $P^{-1}X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad U' = DU \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = 2u_1 \\ u_2' = u_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = K_1 e^{2t} \\ u_2 = K_2 e^{t} \end{cases} \qquad X = PU = \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} + 3K_2 e^{t} \\ -K_1 e^{2t} - 4K_2 e^{t} \end{pmatrix}$

ensuite on peut chercher une sol particulière par exemple de la forme $x(t) = at + b$ et $y(t) = ct + d$ $\quad (x,y)$ est sol. ssi

$\begin{cases} a = 5(at+b) + 3(ct+d) + t \\ c = -4(at+b) - 2(ct+d) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5a+3c+1=0 \\ 5b+3d-a=0 \\ -4a-2c=0 \\ -4b-2d=c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c=-2a \\ a=1 \\ 5b+3d=1 \\ 4b+2d=+2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-2 \\ d=-3 \\ b=2 \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = K_1 e^{2t} + 3K_2 e^{t} + t + 2 \\ y(t) = -K_1 e^{2t} - 4K_2 e^{t} - 2t - 3 \end{array}}$ pour tte constante K_1 et K_2

Exercice 4 :

$u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

u_n est continue, pour x fixé $(|u_n|) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}+x^2}\right)_n$ est une suite décroissante on peut donc appliquer le théorème des séries alternées.

La série $\sum u_n(x)$ converge et $\left| \sum_{n=N}^{\infty} u_n(x) \right| \leq |u_N(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{N}+x^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

Si l'on note $S_N(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ et $S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$ alors

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |S_N(x) - S(x)| \leq \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{N}}}_{\text{Ne dépend pas de } x.}$ $\quad (S_N)$ C.U. vers S sur $\mathbb{R}$

or S_N est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

5.1.a : $f_n(x) = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+x^2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = f(x) \qquad g_n(x) = \cos(x + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} \cos x$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$

(f_n) C.S. vers f sur $\mathbb{R}$ et (g_n) C.S. vers cosinus sur $\mathbb{R}$.

5.1.b : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n}$ donc (f_n) C.U. vers f sur $\mathbb{R}$

$|g_n(x) - \cos x| = 2 \left|\sin(x + \frac{1}{2n})\right| \left|\sin \frac{1}{n}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{1}{n}\right|$

donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \leq 2 \left|\sin\frac{1}{n}\right|$ donc (g_n). C.U. vers cosinus sur $\mathbb{R}$

5.2.a : Supposons que $|u(x)| \leq M_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc il existe N à partir duquel les éléments de la suite sont inférieurs à 1.

$\forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |u_n(x) - u(x)| \leq \sup_t |u_n(t) - u(t)| \leq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n(x) - u(x) \in [-1, 1]$ donc $u_n(x) \in [u(x)-1 ; u(x)+1]$

or $u(x) \in [-M_1 ; M_1]$ donc pour $n \geq N \quad u_n(x) \in [-M_1 - 1 ; M_1 + 1]$

Plus rapidement $|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u(x)| + |u(x)| \leq 1 + M$ pour $n \geq N$.

5.2.b : Soit M comme dans le a) tq $\forall n \geq N \quad |u_n(x)| \leq M$ et $|v(x)| \leq M' \ \forall x \in \mathbb{R}$

$|u_n(x) v_n(x) - u(x)v(x)| \leq |u_n(x)v_n(x) - u_n(x)v(x)| + |u_n(x)v(x) - u(x)v(x)|$

$\leq |u_n(x)| \, |v_n(x) - v(x)| + |u_n(x) - u(x)| \, |v(x)|$

avec pour $n \geq N$ $\quad \leq M \underbrace{\sup_t |v_n(t) - v(t)|}_{\to 0} + \underbrace{\sup_t |u_n(t) - u(t)|}_{\to 0} M'$ par C.U.

Donc $(u_n v_n)$ C.U. vers uv sur $\mathbb{R}$.

5.2.c : $u_n(x) = v_n(x) = x + \frac{1}{n} \qquad (u_n v_n)(x) = x^2 + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$ $\quad (u_n)$ et (v_n) C.U. vers id
$(u_n v_n)$ ne cvce pas unif^t vers $x \mapsto x^2$

5.3 : Conséquence immédiate de 5.1.b. et 5.2.b.