L2 licence de mathématiques
12 mai 2021
Durée 3 heures

Examen de compléments d'analyse

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. La rédaction doit mettre en valeur une grande rigueur mathématiques.
Barème indicatif sur 30 : 7+3+6+4+10

Exercice 1 : Question de cours

1. Rappeler la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}$, d'un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Démontrer à l'aide de ces définitions que $[0;1[$ n'est ni un ouvert, ni un fermé de $\mathbb{R}$.
3. On va redémontrer le résultat de cours suivant : *F est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si toute suite d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}$ a sa limite dans F.*
   (a) Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, montrer que $l \notin \mathbb{R} \setminus F$.
   (b) Supposons que F ne soit pas un fermé de $\mathbb{R}$, que peut on dire de $\mathbb{R} \setminus F$, montrer qu'il existe une suite d'élément de F qui converge vers un élément de $\mathbb{R} \setminus F$.
   (c) Conclure.

Exercice 2 :

On considère la partie $A = \left\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup]5;6[\cup]6;+\infty[$
Déterminer sans justification $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, A', et A''.

Exercice 3 :

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 5x(t) + 3y(t) + t \\ y'(t) = -4x(t) - 2y(t) \end{array}\right.$

Exercice 4 :

Montrer que la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

1. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = \frac{n+1}{n+nx^2} \text{ et } g_n(x) = \cos(x + \frac{1}{n})$$
   (a) Étudier la convergence simple des suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}$, on pourra si nécessaire utiliser la formule : $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers les fonctions u et v.
   (a) Montrer que si u est bornée alors :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ n \geq N \Rightarrow |u_n(x)| \leq M$$
   (b) Montrer que si u et v sont bornées alors la suite de fonctions $(u_n v_n)$ converge uniformément vers la fonction uv sur $\mathbb{R}$.
   (c) Donner un exemple où (u_n) et (v_n) convergent uniformément vers u et v sur $\mathbb{R}$ mais $(u_n v_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite de fonctions (h_n) définie par $h_n(x) = \dfrac{(n+1)\cos(x + \frac{1}{n})}{n+nx^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.