Examen de complément d'analyse. Mai 2019.

Exercice 4.

4.1. Une borne supérieure est, si elle existe, le plus petit des majorants de A.

4.2.a $\forall n \quad u_n \geq 0 \quad v_n \geq 0$.

Pour tout n $\quad u_n \leq \sup_k u_k$ en multipliant par $\underline{v_n \geq 0}$ $\quad u_n v_n \leq (\sup_k u_k)\, v_n$

or $v_n \leq \sup_t v_t$ donc $u_n v_n \leq \underbrace{\sup_k u_k \quad \sup_t v_t}_{\text{est un majorant de l'ensemble } \{u_n v_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N}\}}$.

Comme le sup est le plus petit des majorants $\sup u_n v_n \leq \sup_k u_k \ \sup_t v_t$.

4.2.b: Pour tout $n>0$ $\quad u_n = -2$ et $u_0 = 0$
$\quad v_n = -2$ et $v_0 = 0$

$\sup (u_n v_n) = 4$

$\sup u_n = 0$ et $\sup v_n = 0$.

4.3.a Soit (u_n) une suite majorée d'éléments de $\mathbb{R}$

$u'_n = \sup(u_n ; u_{n+1}, \dots u_{n+k}, \dots)$ $\quad (u'_n)$ est 1 suite convergente et

$\overline{\lim}\, u_n \stackrel{def}{=} \lim u'_n$.

4.3.b: d'après 1.2.a $\quad w'_n = \sup(u_n v_n ; u_{n+1} v_{n+1} ; \dots ; u_{n+k} v_{n+k} ; \dots) \leq u'_n v'_n$.

en passant à la limite on obtient.

$\lim w'_n \leq \lim u'_n v'_n = \lim u'_n \lim v'_n$ $\quad$ soit $\overline{\lim}\, w_n \leq \overline{\lim}\, u_n \ \overline{\lim}\, v_n$

4.3.c: $u_n = 0$ si n est paire et $u_n = 1$ si n est impaire

$v_n = u_{n+1}$ pour tout n.

$u_n v_n = 0$ pour tout n et donc $\overline{\lim}\, u_n v_n = 0$; $\overline{\lim}\, u_n = 1$ et $\overline{\lim}\, v_n = 1$.

Exercice 2:

2.1 $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ ssi toute suite d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}$ a sa limite dans F.

2.2. Soit (u_n) une suite d'élt de $f^{-1}(F)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$u_n \in f^{-1}(F)$ donc $f(u_n) \in F$ comme $u_n \to \ell$ et f est continue alors

$f(u_n) \to f(\ell)$ comme $f(u_n) \in F$ et que F est fermé $f(\ell) \in F$

donc $\ell \in f^{-1}(F)$. D'après 2.1. $f^{-1}(F)$ est donc un fermé de $\mathbb{R}$.

2.3. On sait qu'un compact est un fermé, borné. Il s'agit donc de trouver f et K tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas borné. Par exemple

$f = 1$ et $K = [0;2]$. $\quad f^{-1}(K) = \mathbb{R}$.

Exercice 1:

1.1: Soit x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$ la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_n$ est décroissante donc d'après le TSA la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ est convergente, la série de fonction $\sum u_n$ C.S. sur $\mathbb{R}_+^*$

1.2. Nous avons $\left|\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. $\quad |u_n(x)| = \frac{1}{n^x}$

La série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge ssi $x>1$ donc le plus gd intervalle sur lequel la série $\sum |u_n|$ converge simplement est $]1;+\infty[$.

1.3: $f(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ (n fixé) $\quad$ f est dérivable et $f'(x) = -\ln n \ e^{-x \ln n}$

1.4. Pour n fixé $\quad \beta_n = \sup_{x \in [\frac{1}{2};+\infty[} |u_n(x)| = |u_n(\tfrac{1}{2})| = \frac{1}{\sqrt{n}}$

et $\sum \beta_n$ diverge. La série ne converge pas normalement sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

1.5: On note $S(x)$ la somme de la série $\sum u_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (3.1)

$\alpha_n = \sup_{x \in [\frac{1}{2};+\infty[} \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right| = \sup_{x \in [\frac{1}{2};+\infty[} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|$

Pour $x \in [\frac{1}{2};+\infty[$ la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée on a donc

$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\quad$ donc $0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

donc $\lim \alpha_n = 0$. La série de fct $\sum u_n$ C.U. sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

1.6. $u'_n(x) = \frac{-\ln n}{n^x}(-1)^n$ $\quad \sup_{x \in [3;+\infty[} |u'_n| = \frac{\ln n}{n^3} = \gamma_n$ $\quad n^2 \gamma_n = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

à partir d'un certain rang $n^2 \gamma_n \leq 1$ donc $\gamma_n \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \gamma_n$ converge

la série de fonction $\sum u'_n$ converge normalement sur $[3;+\infty[$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est dérivable de dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ sur $[3;+\infty[$.

1.7. Il n'y a pas C.N. de la série $\sum u'_n$ mais on peut montrer la C.U. sur tout intervalle $[\varepsilon;+\infty[$ pour $\varepsilon>0$. Soit $\varepsilon>0$ et $a_n(x) = \frac{\ln n}{n^x}$

posons $h(t) = \frac{\ln t}{t^x}$ pour $t>1$ et x fixé h est dérivable et $h'(t) = t^{-x-1} - x \ln t \ t^{-x-1}$

$h'(t) = (1 - x \ln t)\, t^{-x-1}$ $\quad$ Pour $t \geq e^{1/\varepsilon}$ $\quad x \ln t \geq \frac{x}{\varepsilon} \geq 1$ donc $h'(t) \leq 0$.

On en déduit que la suite $(a_n(x))$ est décroissante à partir du rang $[e^{1/\varepsilon}]$

Pour $n > [e^{1/\varepsilon}]$ $\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}(-1)^n\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\varepsilon}}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

La série $\sum u'_n$ C.U. sur $[\varepsilon;+\infty[$ $\quad$ donc $\sum u_n$ est dérivable sur $[\varepsilon;+\infty[$

Comme cela est vrai pour $\forall \varepsilon > 0$ $\sum u_n$ est dérivable sur $]0;\infty[$.

Exercice 2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

se ramène à $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} u' = u \\ v' = 2v+1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u = Ke^t \\ v = Ce^{2t} - \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Ke^t + Ce^{2t} - \frac{1}{2} \\ -4Ke^t - Ce^{2t} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$