L2 licence de mathématiques
9 mai 2019
Durée 3 heures

Examen de compléments d'analyse

L'utilisation ou la consultation de téléphone ou de montre connectée est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. La rédaction doit mettre en valeur une grande rigueur mathématique. L'ordre de résolution est laissé libre. Barème indicatif : 8+3+3+6

Exercice 1 : Série de fonctions

Soit u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$. On rappelle le théorème spéciale des séries alternées, soit (a_n) une suite décroissante convergente vers 0, la série numérique $\sum (-1)^n a_n$ est convergente et pour tout N

$$|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n| \leq a_N$$

1. Montrer que que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.
2. La série de fonctions $\sum |u_n|$ converge-t-elle simplement sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$? Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ sur lequel la série de fonctions $\sum |u_n|$ converge simplement.
3. Pour $n > 0$ fixé, étudier la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{n^x}$. On rappelle que par définition $n^x = e^{x \ln n}$.
4. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$?
5. Montrer que que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
6. Montrer que S, la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, est dérivable sur $[3; +\infty[$.
7. (plus dur, hors barème) Montrer que S, la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : Système différentiel

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t) + 1 \\ y'(t) = -4x(t) - 2y(t) - 1 \end{cases}$

Exercice 3 : Topologie de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, et F un fermé de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler, avec précision, la propriété caractéristique des fermés de $\mathbb{R}$ qui fait intervenir les suites.
2. Montrer en utilisant les suites que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple d'application f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et d'un compact K de $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(K)$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Bornes et limites supérieures

1. Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0; 2]$.
   (a) Montrer, avec rigueur, à l'aide de la définition de la borne supérieure que
   $$\sup\{u_n v_n \in \mathbb{R}/n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{u_m \in \mathbb{R}/m \in \mathbb{N}\}\ \sup\{v_m \in \mathbb{R}/m \in \mathbb{N}\}$$
   (b) Montrer à l'aide d'un contre exemple que l'inégalité précédente n'est pas vrai pour les suites d'éléments de $[-2; 2]$.
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0; 2]$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n v_n$.
   (a) Rappeler la définition de la limite supérieure d'un suite d'éléments de $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer à l'aide de la définition de la limite supérieure que : $\overline{\lim}(w_n) \leq \overline{\lim}(u_n)\overline{\lim}(v_n)$
   (c) Donner un exemple de deux suites d'éléments de [0 ;2] pour lesquelles l'inégalité précédente est stricte.