Université de Cergy-Pontoise.

L2M, Examen d'approfondissements, 16 mai 2018 (3h.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Les quatres exercices sont indépendants. Le barème sur 45 est indicatif. Note sur 20, obtenue en divisant par 2 le nombres de points.

Rappels de cours : Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de E si, pour tout voisinage de V de x, l'intersection $(V \setminus \{x\}) \cap E$ est non vide. Un point a de E est un point isolé de E s'il existe un voisinage W de a tel que l'intersection $(W \setminus \{a\}) \cap E$ soit vide.

Résultats admis : on pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :
R0. $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$.
R1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et une suite réelle bornée $u : D \longrightarrow I$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $f \circ u = (f(u_n))_{n \in D}$ est l'image par f de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (u_n)_{n \in D}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{VA}(f \circ u) \;=\; f\big(\mathcal{VA}(u)\big)\,.$$

R2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et une suite réelle bornée $u : D \longrightarrow I$. Alors la limite supérieure de la suite $f \circ u = (f(u_n))_{n \in D}$ est l'image par f de la limite supérieure de la suite $u = (u_n)_{n \in D}$, c'est-à-dire

$$\limsup_{n \to \infty} f\big(u_n\big) \;=\; f\Big(\limsup_{n \to \infty} u_n\Big)\,.$$

R3. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle telle que les suites $(u_{4p})_{p \in \mathbb{N}}$, $(u_{4p+1})_{p \in \mathbb{N}}$, $(u_{4p+2})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{4p+3})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3, respectivement. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est constitué des valeurs ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3, c'est-à-dire

$$\mathcal{VA}(u) \;=\; \big\{\ell_0\,,\,\ell_1\,,\,\ell_2\,,\,\ell_3\big\}\,.$$

R4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est croissante.
R5. La fonction $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Arctan}'(t) = (1+t^2)^{-1}$.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (8 pts). Résoudre le système différentiel linéaire (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} ,$$

donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \begin{cases} x_1'(t) \;=\; \frac{3}{2}x_1(t) \;-\; \frac{3}{2}x_2(t) \;+\; e^{-2t}\,, \\ \\ x_2'(t) \;=\; -\frac{3}{2}x_1(t) \;+\; \frac{3}{2}x_2(t) \;-\; e^{3t}\,. \end{cases}$$

Exercice 2. : (10 pts). On considère les suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$v_n \;=\; \sin\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\Big)\,, \quad w_n \;=\; \exp\big(1 + v_n + v_n^2\big)\,,$$

$$x_n \;=\; \ln\left(\frac{3n+1}{5n+2}\Big(1 + \big|3 + 8v_n\big|\Big)^{-7}\right) \quad \text{et} \quad y_n \;=\; \exp\Big(n\ln\big(3n + 2(-1)^n\big) - n\ln(2n)\Big)\,.$$

1. Montrer que
$$\mathcal{VA}(v) \;=\; \Big\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; -\frac{1}{2}\,;\; \frac{1}{2}\,;\; \frac{\sqrt{3}}{2}\Big\}\,.$$
Que valent $\liminf v$ et $\limsup v$?
2. Déterminer $\mathcal{VA}(w)$.
3. Calculer $\limsup x$.
4. Déterminer $\limsup \sqrt[n]{y_n}$.

Exercice 3. : (14 pts). Soit $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$g_1(x) \;=\; x^4 \;+\; 4x^3 \;+\; 30x^2 \;-\; 17x \;+ 3 \quad \text{et} \quad g_2(x) \;=\; \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que g_1 et g_2 sont convexes sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_a : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$\varphi_a(x) \;=\; \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \tag{1}$$
   a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction φ_a admet une limite en $-\infty$, notée $\lim\limits_{-\infty} \varphi_a$, qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Montrer que la fonction φ_a admet une limite en $+\infty$, notée $\lim\limits_{+\infty} \varphi_a$, qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \varphi_a = \lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_a = \lim\limits_{+\infty} \varphi_0$.

c. On suppose que f est k-lipschitzienne pour un $k \geq 0$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0 \in \mathbb{R}$ et $-k \leq \lim\limits_{-\infty} \varphi_0 \leq \lim\limits_{+\infty} \varphi_0 \leq k$.

d. On suppose que $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0 \in \mathbb{R}$. Soit $k \geq \max(|\lim\limits_{-\infty} \varphi_0|; |\lim\limits_{+\infty} \varphi_0|)$. Pour $a < b$, montrer que

$$\lim_{-\infty} \varphi_0 \;\leq\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;\leq\; \lim_{+\infty} \varphi_0 \,. \tag{2}$$

(Indication : on pourra utiliser 2.b.)
En déduire que f est k-lipschitzienne.

3. Soit φ_0 la fonction donnée par (1) avec $f = g_1$ et $a = 0$. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0$.

4. Soit φ_0 la fonction donnée par (1) avec $f = g_2$ et $a = 0$. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0$.
(Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.)

5. La fonction g_1 est-elle lipschitzienne ?

6. Montrer que g_2 est lipschitzienne et déterminer le minimum de l'ensemble des $k \in \mathbb{R}^+$ tels que g_2 est k-lipschitzienne.

Exercice 4. : (13 pts). On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A \;=\; \left\{ p + \frac{1}{q} \,;\; p \in \mathbb{Z} \,,\, q \in \mathbb{N}^* \right\} .$$

1. Montrer 1/2 est un point isolé de A. Montrer que 7/2 est un point isolé de A.
2. Montrer que 0 est un point d'accumulation de A.
3. Montrer que $\mathbb{Z} \subset A$.
4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, p est un point d'accumulation de A.
5. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 2$. Montrer que $p + (1/q)$ est un point isolé de A.
6. Montrer que A est fermée.
7. Quel est l'intérieur $\mathring{A}$ de A ?
8. La partie A est-elle compacte ?
9. Déterminer l'ensemble A' des points d'accumulation de A.

Fin de l'épreuve.