Université de Cergy-Pontoise.

Examen d'approfondissements, 2 juin 2017, 2 heures.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. La note sera sur 20. Le barème est indicatif. L'épreuve comporte **4 exercices** sur **2 pages**.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 points). On considère le système différentiel (E) d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; A \cdot Y(t) \,+\, 2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A \;=\; \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Soit $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction de classe C^1 donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Z(t) \;=\; -\frac{1}{4} e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \,+\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 3t+1 \end{pmatrix}\,.$$

   Montrer que Z est une solution du système (E).
2. Résoudre le système différentiel sans second membre associé (E_0) qui est donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = A \cdot Y(t)$.
3. En déduire l'ensemble S des solutions du système (E).

Exercice 2. : (4 points). Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n \;=\; \frac{\ln(n^7)}{n} \,+\, \frac{3-2n}{7+n}\,, \qquad v_n \;=\; (-1)^n e^n \,+\, \sin\Big((2n+3)\frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

Exercice 3. : (5 points). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(t) \;=\; \frac{t}{n} \quad \text{et} \quad g_n(t) \;=\; n\,\ln\big(1 \,+\, t^n \cdot n^{-1}\big)\,.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, déterminer la valeur de $\sup\limits_{t\in[0;1]} |f_n(t)|$ qui est défini par

$$\sup_{t\in[0;1]} |f_n(t)| \;:=\; \sup\big\{|f_n(t)|\,;\; t \in\, [0;1]\big\}\,.$$

   En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction f.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in]0;1]$, montrer que $\sup\limits_{t\in[0;c]} |g_n(t)|$, qui est défini par

$$\sup_{t\in[0;c]} |g_n(t)| \; := \sup\big\{|g_n(t)|\,;\; t \in [0;c]\big\}\;,$$

vaut $g_n(c)$.

4. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.
5. Soit $c \in]0;1[$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g, uniformément sur $[0;c]$. La convergence est-elle uniforme sur $[0;1]$? Justifier la réponse.

Exercice 4. : (6 points). Vrai ou faux ? Répondre **avec justification**. **0,25 point** par réponse correcte, les points entre parenthèses pour la justification.

1. L'intervalle $]-2;+\infty[$ est ouvert. **(0,25 point)**.
2. L'adhérence de $]1;9]$ est $[1;9]$. **(1,25 point)**.
3. -3 appartient à l'intérieur $\mathring{A}$ de l'ensemble $A =]-4;-2] \cup \{2-n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$. **(0,5 point)**.
4. 0 est un point d'accumulation de l'ensemble $B =]-\infty;-1[\cup \{n^{-1}\ln(n); n \in \mathbb{N}^*\}$. **(1,25 point)**.
5. Une fonction convexe $f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est positive sur $]-1;1[$. **(0,25 point)**.
6. L'exponentielle de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$\exp(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^{-1} & e-e^{-1} \\ e-e^{-1} & e+e^{-1} \end{pmatrix}\;. \;\; \textbf{(1 point)}\,.$$

Fin de l'épreuve.